OPTIMALE VORBEUGENDE INSTANDHALTUNG UNTER EINBEZIEHUNG VON JUSTIERUNG UND MINIMALER REPARATUR

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der
Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
WERNER SPICKENHEUER
aus
ASBACH (WESTERWALD)

BONN 1976

OPTIMALE VORBEUGENDE INSTANDHALTUNG UNTER EINBEZIEHUNG VON JUSTIERUNG UND MINIMALER REPARATUR

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der
Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
WERNER SPICKENHEUER
aus
ASBACH (WESTERWALD)

BONN 1976

Tag der Promotion: 9. Juli 1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan: Professor Dr. Walter Gerhardt

Erstreferent: Professor Dr. Horst Albach
Zweitreferent: Professor Dr. Hans Föllmer

Tag der mündlichen Prüfung: 1.7., 6.7. und 9.7.1976

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung 5

2. Grundlagen der betrieblichen Instandhaltung 10
2.1 Ursachen für Instanhaltungsmaßnahmen 10
2.2 Ursachenfeststellung 13
2.3 Auswirkungen der Instandhaltungsur - sachen 14
2.3.1 Auswirkungen auf den Leistungs- erstellungsprozeß 14
2.3.2 Auswirkungen auf die betrieb - lichen Leistungen 18
2.4 Maßnahmen der Instandhaltung 19
2.5 Zielfunktionen 22

3. Stochastische Prozesse 28

4. Instandhaltungsmodell 1 37
4.1 Allgemeine Systemcharakteristik
4.2 Modellbeschreibung 38
4.3 Laufzeitabhängige Strategie 43
4.3.1 Maximierung des zu erwartenden Gewinns pro Betriebszeiteinheit 52
4.3.2 Minimierung der zu erwartenden Kosten pro Laufzeiteinheit 67
4.3.3 Maximierung des zu erwartenden Nutzungsgrades 77
4.4 Kostenabhängige Strategie 83
4.4.1 Maximierung des zu erwartenden Gewinns pro Betriebszeiteinheit 88
4.4.2 Minimierung der zu erwartenden Kosten pro Laufzeiteinheit 99
4.5 Vergleich zwischen laufzeit- und kosten- abhängiger Strategie 104

5. Instandhaltungsmodell 2 112
5.1 Modellbeschreibung 112
5.2 Maximierung des zu erwartenden Gewinns pro Betriebszeiteinheit 116
5.3 Minimierung der zu erwartenden Kosten pro Laufzeiteinheit 122
5.4 Maximierung des zu erwartenden Nutzungsgrades 135

6. Vergleich der beiden Instandhaltungsmodelle 138

7. Zusammenfassung 140

Literaturverzeichnis 143

1. EINLEITUNG

Die ständig fortschreitende Entwicklung neuer Technologien hat die betriebliche Leistungserstellung zu einem immer komplexeren Prozeß der Faktorkombination werden lassen, [1] der vor allem durch eine steigende Anlagenintensität gekennzeichnet ist. Die hierzu benutzten Anlagen werden außerdem in den meisten Fällen zunehmend komplizierter und aufwendiger bei gleichzeitiger Leistungssteigerung.

Hierdurch bedingt nehmen die Möglichkeiten der Leistungsminderung durch die vermehrte Zahl der ineinandergreifenden Produktionsschritte stark zu, was den Instandhaltungsaufwand entsprechend anwachsen läßt.

Unter Instandhaltung verstehen wir dabei alle Maßnahmen, die zur Aufrechterhaltung, Wiederherstellung und Verbesserung der Leistungsfähigkeit eines Betriebsmittelbestandes dienen. [2] Von den Instandhaltungsaktionen sind alle diejenigen Maßnahmen abzugrenzen, die den Betriebsmittelbestand erweitern (Erweiterungsinvestitionen). Ebenso sollen alle Verbesserungen, welche die Leistungsfähigkeit der Betriebsmittel über den ursprünglichen Neuzustand hinaus erhöhen, wie z.B. Umbauten an den technischen Aggregaten, nicht zu den Instandhaltungsaktionen gerechnet werden.

Durch die Instandhaltung erfolgt eine wachsende Bindung von Resourcen, die es notwendig werden läßt, sich dem Problem einer optimalen Instandhaltungsplanung zuzuwenden. Denn die Instandhaltungsaufwendungen in der chemischen Industrie betragen jährlich bis zu 10% des Wiederbeschaffungswertes der Anlagen. [3]

---

1) Gutenberg [55] , S. 2 ff faßt den Prozeß der betrieblichen Leistungserstellung als Kombination der produktiven Faktoren: Menschliche Arbeitsleistung, Betriebsmittel und Werkstoffe auf.
2) vgl. Arbeitskreis Instandhaltung [5] , S. 11, Herzig [62], s. 31, Thompson [166] , S. 1 ff, Wolff [182] , S. 1
3) vgl. Kölbel, Schulze [81] , S. 35

In der Eisen- und Stahlindustrie erreichen die Instandhaltungskosten einen Satz zwischen 5% und 10% des Jahresumsatzes. [1] Hieraus ersieht man, daß der Instandhaltungsbereich ein bedeutender Kostenfaktor ist, den man auf Rationalisierungsreserven hin untersuchen muß.

In dieser Arbeit soll die optimale Gestaltung von vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahmen zur Aufrechterhaltung der Leistungsfähigkeit der Betriebsmittel untersucht werden. Hierbei soll speziell der Ersatz bzw. die Überholung vor dem technischen Versagen geplant werden. Man bezeichnet den Zeitpunkt dieser vorbeugenden Maßnahmen auch als das Ende der wirtschaftlichen Nutzungsdauer. [2]

Diese Probleme wurden erstmals von Åkerman [2], Wicksell [176] und Taylor [163] aufgegriffen und fanden eine grundlegende Behandlung in den Arbeiten von Hotelling [66], Roos [132], [133] und Preinreich [121]. Diese ersten Beiträge gingen von den Voraussetzungen aus, daß eine einstufige Einproduktfertigung vorliege und die Einnahme- und Auszahlungszeitpunkte und die Höhe der Zahlungen über die gesamte Nutzungsdauer der Anlage bekannt seien.

Von dieser deterministischen Betrachtungsweise weg führten die Arbeiten von Lotka [91], [92] und Preinreich [120], indem sie d Lebensdauer maschineller Anlagen über entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen erfaßten. Diese ersten Ansätze konnten jedoch erst später ausgebaut werden, als durch die Arbeiten von Feller [34], [35], [36], Doob [29], [30], Levy [90], und Smith [141], [142] eine leistungsfähige mathematische Theorie stochastischer, regenerativer Prozesse zur Verfügung stand.

---

1) vgl. Wesemann [175], S. 1130 ; Mellerowics [101], S. 32 f

2) vgl. Schneider [151], S. 75 ff; Schneider [149], S.VII.

Eingebettet in die regenerativen, stochastischen Prozesse sind die Markov- und Semi-Markov-Prozesse. Erfaßt man mit ihnen Instandhaltungsprobleme, so geht man von verschiedenen Systemzuständen aus, d.h. man unterteilt die Leistungsfähigkeit der Betriebsmittel z.B. in gut, zufriedenstellend, gerade noch ausreichend, ausgefallen. Diesen Zuständen ordnet man die entsprechenden Verweilzeiten (stochastische Größen) zu und berechnet die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Zuständen. Aus dieser Kenntnis heraus bestimmt man dann den Zustand, bei dessen Erreichung das System vorbeugend instandgehalten wird, mit Optimierungsalgorithmen. [1)]

Um jedoch eine derartige optimale Strategie verwenden zu können, ist eine genaue Kenntnis des jeweiligen Systemzustands- und der Verweildauer erforderlich. Dies ist jedoch in vielen Fällen nicht möglich oder nur durch einen erheblichen Aufwand wie zusätzliche Inspektionen, Zerlegung von Anlageteilen etc. zu erreichen. Außerdem geschehen die Zustandsänderungen nicht immer in Sprüngen, sondern können sich z.B. bei Abnutzung als kontinuierliche Veränderungen auswirken. Daher kann diese Methode nur begrenzt Anwendung finden.

Ein weiterer Ansatz, die Instandhaltungsprobleme einer optimalen Lösung zugänglich zu machen, erfolgte mit Hilfe der Warteschlangentheorie. [2)] Jedoch ist eine analytische Bestimmung der optimalen Strategie für beliebige Lebensdauerverteilungen nicht möglich, sondern man ist auf Simulationsmodelle angewiesen, die schon bei wenigen Einflußgrößen große Rechenkapazitäten erfordern. [3)]

---

1) Einen Überblick über die Theorie der Markov- und speziell der Semi-Markov-Prozesse, findet man bei Cinlar [19] und Howard [68], Vol. II. Zu Anwendungen auf Instandhaltungsprobleme vgl. Henke [61], Kao [77], Osaki [116], Tahara, Nishida [158], Wolff [182], S. 117 ff.

2) Eine ausführliche Darstellung mit Instandhaltungsproblemen in Kistner [78].

3) vgl. Kistner [78], S. 184 ff

Das junge Gebiet der Kontrolltheorie erschloß Näslund [106] für die optimale Planung von Instandhaltungsmaßnahmen. Hierbei gelang es, die Wechselwirkung zwischen den Instandhaltungsaufwendungen und der Leistungsfähigkeit der Betriebsmittel einzubeziehen und simultan die Höhe der Instandhaltungsausgaben und das Ende der wirtschaftlichen Lebensdauer zu bestimmen. [1] Da jedoch bisher keine geschlossene Theorie der stochastischen Kontrolltheorie zur Verfügung steht und die numerische Auswertung ebenfalls große Schwierigkeiten bereitet, beschränkte man sich bisher auf deterministische Ansätze.

In der vorliegenden Arbeit soll die Lösung von Instandhaltungsproblemen auf die Darstellung der Nutzungsdauer und der Instandhaltungszeiten als Erneuerungsprozesse gestützt werden. [2] Die entstehenden Kosten werden durch eine entsprechende Bewertung dieser Prozesse einbezogen. Auch hierbei ist es erforderlich, Abstraktionen von der betrieblichen Wirklichkeit zu machen, um so zu Modellen zu gelangen, die möglichst die entscheidungsrelevanten Tatsachen berücksichtigen. Denn eine theoretische Analyse hat als Ausgangspunkt die empirische Realität. Von dieser wird ein Denkmodell geformt, in das man die wesentlichen Merkmale einbezieht und unbedeutende Eigenschaften außer Betracht läßt. [3]

Da der Beschaffung benötigter Daten über Lebensdauerverteilung, Reparaturkosten, Betriebskosten, Reparaturzeit, Verschleißwirkungen usw. technische und ökonomische Grenzen gesetzt sind, erscheinen die hier vorgenommenen Vereinfachungen der realen Situation durchaus zulässig. Darüber hinaus können die hier gewonnenen Optima als Ausgangslösung für umfassendere Planungen benutzt werden, indem man über eine Sensitivitätsanalyse feststellt, wie sich Verschiebungen des Instandhaltungs

---

1) vgl. auch Bensoussan, Hurst, Näslund [12], Kapitel 5, S. 97-110, Thompson [165], Arora, Lele [6], Sethi, Morton [138], Tapiero [160], [161], [162].

2) Zur Definition vgl. Abschnitt 3.

3) vgl. Gutenberg [56], S. 26; Kosiol [84], S. 320f

zeitpunktes auf das Optimum auswirken. Hierdurch kann dann eine Abstimmung mit anderen betrieblichen Teilbereichen erfolgen, wenn eine Erfassung der gesamten betrieblichen Interpendenzen auf Grund der Komplexität nicht möglich ist.

Bei der bisherigen Behandlung von Instandhaltungsproblemen mit Erneuerungsprozessen hat man sich auf Teilaspekte beschränkt. Man wandte sich entweder dem Problem des vollständigen Ersatzes, der minimalen Reparatur oder der Justierung zu, ohne dabei zu berücksichtigen, daß alle diese Maßnahmen die wirtschaftliche Nutzungsdauer beeinflussen.

Die vorliegende Arbeit versucht nun, diese Teilprobleme in ein gemeinsames Modell zu integrieren und aufzuzeigen, welche Auswirkungen dies auf den optimalen Instandhaltungszeitpunkt und auf die untersuchten Zielfunktionen hat.

Auf die bisherigen Arbeiten zu den verschiedenen Teilmodellen wird an dieser Stelle nicht eingegangen, da sie sich vielfach als Spezialfall des hier entwickelten Ansatzes darstellen lassen. Es sei vielmehr auf die einzelnen Abschnitte der Kapitel 4 und 5 hingewiesen und speziell auf die Tabelle 9 in Abschnitt 6. , die einen Überblick über diese Arbeiten gibt und deren Zusammenhang mit dem hier dargestellten Ansatz aufzeigt.

2. GRUNDLAGEN DER BETRIEBLICHEN INSTANDHALTUNG

2.1 URSACHEN FÜR INSTANDHALTUNGSMAßNAHMEN

Die Leistungsfähigkeit eines Betriebsmittelstandes ist im Zeitablauf Änderungen unterworfen, die nicht oszillierend oder sich selbst korrigierend sind und die somit Instandhaltungsmaßnahmen erforderlich machen, wenn man sie beseitigen will. [1)]

Diese Veränderungen können sowohl durch die Nutzung entstehen wie aber auch durch nutzungsunabhängige Einflüsse bewirkt werden.

Bei der Nutzung der Betriebsmittel werden Instandhaltungs - maßnahmen hervorgerufen durch:

a) nutzungsbedingten Verschleiß
b) personalbedingte Fehler
c) sonstige Ursachen

Hierbei wird der Begriff "Verschleiß" als eine "Veränderung der stofflich-technischen Beschaffenheit" [2)] der Betriebsmittel aufgefaßt. Diese Veränderungen zunächst rein technischer Art führen aber direkt oder mit Verzögerung zu ökonomischen Auswirkungen, indem die Leistungsfähigkeit absinkt oder sogar völlig aufhört.

Verschleißerscheinungen können zum einen nutzungsbedingt sein und äußern sich hauptsächlich in mechanischer Abnutzung, Materialermüdung und Korrossion; man spricht dann von Ab - nutzungsverschleiß [3)]. Zum anderen treten Verschleißwir -

---

1) Kistner [78], S. 18 bezeichnet diese Veränderungen als Betriebsstörungen, indem er den Begriff Störung einengt auf solche Veränderungen, die Instandhaltungsmaßnahmen erforderlich machen. Andere Störungsursachen schließt er aus. Zu den Störungsursachen vgl. Gutenberg [55], S. 138, Das Refa-Buch [25], S. 46.

2) vgl. Männel [95], S. 30; synonym zu "Verschleiß" wird der Begriff "Abnutzung gebraucht, der manchmal jedoch auch als Oberbegriff benutzt wird.

3) Gutenberg [54], S. 179 bezeichnet den Abnutzungsverschleiß als "technischen Verschleiß".

kungen aber auch unabhängig von der jeweiligen Nutzung auf und zeigen sich durch Korrosion, Verwittern, Verschmutzung und Materialalterung. Diese Verschleißwirkungen bezeichnet man dann als ruhenden oder natürlichen Verschleiß.[1)]

Den oftmals noch angeführten Katastrophenverschleiß [2)] oder außergewöhnlichen Verschleiß [3)] wird man bei der Instandhaltungsplanung nicht berücksichtigen, da hiermit Feuer, Sturm, Erdbeben etc. erfaßt werden.

Diese Ereignisse können wegen mangelnder Vorhersehbarkeit nicht mit in die Planung einbezogen werden.

Einfluß auf den Verschleiß besitzen die Einsatzbedingungen, denen die Betriebsmittel unterliegen. Hierzu zählen die Belastung, die Geschwindigkeit und neben der Auslastung aber auch die Umweltbedingungen wie die Temparatur, die Feuchtigkeit, die Staubentwicklung etc., die jeweils abhängig sind vom Einsatzort und der Einsatzzeit der Betriebsmittel. Weitere wichtige Einflußfaktoren für den Verschleißverlauf sind die Materialqualität sowie die spezifischen Konstruktionsmerkmale von betrieblichen Anlagen.

Die Auswirkungen des Verschleißes lassen sich teilweise durch eine sorgfältige Pflege und Wartung der Betriebsmittel verringern, indem z.B. die Anlagen regelmäßig gereinigt werden, die Schmierstellen kontrolliert werden, die Betriebsmittel sachgerecht gelagert werden usw..

Neben dem Verschleiß spielen die durch das Personal verursachten Leistungsverschlechterungen eine bedeutende Rolle. Die Fehler des Personals können sich sowohl auf den Verschleiß auswirken, wie auch zu anderen Veränderungen bei der Leistungserstellung führen; beispielsweise erhöht falsche Schmierung den Abrieb an beweglichen Teilen und bewirkt einen größeren Verschleiß, oder ein falsch eingespanntes Werkstück verklemmt sich und macht eine Unterbrechung der Fertigung erforderlich. Die fehlerhafte Handhabung der Betriebsmittel durch das Bedienungspersonal nimmt

1) vgl. Albach [3] , S. 187, Gutenberg [54] , S. 179
2) vgl. Schneider [149] , S. 34
3) vgl. Männel [95] , S. 37

vor allem unter Zeitdruck erheblich zu. Wie Horne und Scott [1] in einer empirischen Untersuchung nachgewiesen haben, geht die Häufigkeitsverteilung von Fehlern des Personals unter Zeitmangel von einer Normalverteilung in eine logarithmische Normalverteilung über. Diese Zunahme der Fehlerhäufigkeit wird man vor allem bei der Planung der Instandhaltungsmaßnahmen berücksichtigen müssen, da bei geplanten Aktionen meist der Zeitdruck geringer ist als bei plötzlichem Leistungsabfall, so daß die Instandhaltungsarbeiten sorgfältiger ausgeführt werden und somit zu einer Verringerung der unvorhergesehenen Maßnahmen beitragen.

Es werden jedoch durch den Verschleiß und die Fehler des Personals noch nicht alle Ursachen erfaßt, die bei der Instandhaltungsplanung berücksichtigt werden müssen. Instandhaltungsmaßnahmen werden nämlich auch notwendig, wenn sich Werkstücke oder Maschinenteile verklemmen, Schrauben oder andere Verbindungsteile lösen, die Justierung sich verschlechtert oder Abflußlöcher sich zusetzen.[2] Diese Ursachen haben wir unter c) zusammengefaßt.

Die nutzungsunabhängigen Einflüsse, die Instandhaltungsmaßnahmen erforderlich machen, haben wir bereits unter dem ruhenden Verschleiß erfaßt; dieser Verschleiß kann natürlich auch durch Fehler des Personals hervorgerufen werden, z.B. durch unsachgemäße Lagerung oder nicht sorgfältig ausgeführte Schutzanstriche .

---

1) vgl. Horne, Scott[65] , Horne[64]

2) Dies wird jedoch manchmal auch zum Verschleiß gerechnet, sogenannter" Ablagerungsverschleiß" , vgl. Schelo[147], S. 16; Männel [95] , S. 31

2.2 URSACHENFESTSTELLUNG

Um die Veränderungen der Leistungsfähigkeit der Betriebsmittel zu beseitigen oder zu verhindern, muß man in der Lage sein, ihre Urschen zu erkennen. Versuchte man jedoch, alle Einzelteile eines Betriebsmittelstandes bezüglich ihres Zustands unter Kontrolle zu halten, so wird dies i.a. nicht möglich sein. Denn die Vielzahl der Teile läßt eine derartige Kontrolle zu aufwendig werden,und oftmals bedarf es trotz moderner Verschleißmessungsmethoden [1] einer Unterbrechung des Produktionsprozesses, um den Verschleiß an einer Maschine fest stellen zu können, da die Maschine in ihre Teile zerlegt werden muß.

Um aber dennoch Aufschlüsse über den Zustand der Betriebsmittel zu bekommen, wird man bei vielen Teilen nicht Verschleiß, Justierungsungenauigkeiten o.ä. direkt erfassen, sondern man beobachtet die Auswirkungen auf den Leistungserstellungsprozeß und auf die erstellten Leistungen. Die Erfassung von Veränderungen bei der Leistungserstellung und Leistung ist meist mit einem wesentlich geringeren Aufwand verbunden als bei allen Teilen auf Zustandsverschlechterungen zu achten.

Stellt man nun Auswirkungen bei der Leistungserstellung und auf die Leistung fest, so muß man, um diese Verschlechterung beheben zu können, die genaue Ursache ermitteln. Man wird auf Grund der festgestellten Veränderungen nicht immer nur auf eine einzige Ursache schließen können, sondern man muß dann z.B. an Hand einer Checkliste die tatsächliche Ursache ermitteln und für deren Beseitigung sorgen. Die möglichen Auswirkungen auf den Leistungserstellungsprozeß und die Leistung werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

---

1) z.B. Radioaktive Verschleißmessung, Ultraschallmessungen etc. vgl. Opitz, Schaller [114].; Hake [57].

2.3 AUSWIRKUNGEN DER INSTANDHALTUNGSURSACHEN

Man kann den Einfluß der Instandhaltungsursachen sowohl bei dem Prozeß der betrieblichen Leistungserstellung wie auch bei den erzeugten Leistungen beobachten. In manchen Fällen äußern sich die Veränderungen nur in einem dieser beiden Bereiche, wenn z.B. eine Maschine eine konstante Leistung abgibt bis zu ihrem Ausfall. Vielfach stellt man jedoch in beiden Bereichen Verschlechterungen fest, indem z.B. die Produktionsmenge absinkt, obwohl man die Faktoreinsatzmengen erhöht.

Es sei jedoch angemerkt, daß diese innerbetrieblichen Auswirkungen ebenso ihre Folgen nach außen haben können, indem die Beziehungen zu den Abnehmern der Leistung empfindlich gestört werden, weil Termine nicht eingehalten werden oder die Qualität nicht den Vereinbarungen entspricht usw.. Jedoch gerade die qualitative und quantitative Leistungsfähigkeit eines Unternehmens bestimmt das Verhältnis zu den Kunden. Störungen in dieser Beziehung, die unter Umständen durch geringfügige Instandhaltungsursachen ausgelöst werden können, haben oft weitreichende Konsequenzen, da der Goodwill des Unternehmens schlechter wird. Ihn wieder aufzubauen ist meistens wesentlich teurer als rechtzeitige Instandhaltung.

2.3.1 AUSWIRKUNGEN AUF DEN LEISTUNGSERSTELLUNGSPROZESS

Die Instandhaltungsursachen wirken in zwei Formen auf den Prozeß der Leistungserstellung ein:

(1) Sie führen zu einer Unterbrechung der Leistungserstellung

(2) Die Input-Output-Beziehung bei der Leistungserstellung ändert sich.

Der Zeitpunkt einer Unterbrechung ist abhängig von den jeweiligen betrieblichen Gegebenheiten. Er kann sofort beim Auftreten einer Instandhaltungsursache liegen, beispielsweise bei einem Bruch des Bearbeitungswerkzeuges oder bei einem Ausfall de Antriebsaggregats einer Fräse.

Jedoch ist es auch möglich, daß der begonnene Bearbeitungsvorgang noch zu Ende geführt werden kann, um dann erst die notwendigen Instandhaltungsaktionen einzuleiten. Dies ist z.B. der Fall, wenn der Abfluß für die Kühlmittel bei Fräsen verstopft ist, der Auffangbehälter für die Kühlflüssigkeit aber die bis zum Ende der Bearbeitung anfallende Menge aufnehmen kann.

Die dritte mögliche Interpendenz zwischen Unterbrechungszeitpunkt und Ursache läßt dem Entscheidungsträger einen gewissen zeitlichen Spielraum, innerhalb dessen die Instandhaltung durchgeführt werden kann. Denn Verschleißerscheinungen, die nicht direkt zu einer Unterbrechung führen, oder Justierungsabweichungen lassen einem die Möglichkeit, den Zeitpunkt der Instandhaltung in gewissen Grenzen frei festzulegen. Bei der Bestimmung dieses Zeitpunktes kann man deshalb nicht nur die technischen Gegebenheiten, wie in den ersten beiden Fällen, sondern in verstärktem Maße auch die ökonomischen Auswirkungen in die Planung einbeziehen.

Die durch Instandhaltungsursachen geänderten Input-Output-Beziehungen sind auf eine veränderte z-Situation zurückzuführen. Gutenberg versteht unter der z- Situation den "Kranz der technischen Eigenschaften", die die Leistungserstellung ermöglichen. [1] Änderungen der z-Situation haben Auswirkungen auf die Faktoreinsatzmengen, die zur Erstellung einer bestimmten Leistung notwendig sind. Denn diese Faktormengen sind über die Verbrauchsfunktionen mit der z-Situation und der Intensität verbunden. [2] Auf Grund von Verschleißwirkungen wird oftmals für die gleiche Leistung ein vermehrter Einsatz an Produtionsfaktoren nötig, da undichte Stellen einen erhöhten Schmiermittelbedarf erforderlich machen oder durch abgenutzte Werkzeuge die menschliche Arbeitsleistung vermehrt werden muß. [3]

---

1) vgl. Gutenberg 55 , S. 330
2) vgl. Gutenberg 55 , S. 330ff; er geht jedoch von einer konstanten z- Situation aus.
3) Diese Veränderungen durch Verschleiß berücksichtigen auch Scheer 146 , S. 21ff, Dahmen 24 , S. 11; jedoch müssen Änderungen der z-Situation nicht nur auf Verschleiß beruhen, sondern es kommen auch andere Ursachen in Betracht (vgl. S.11).

Daher steigen dann bei der Fertigung die Einsatzmengen an Produktionsfaktoren pro produziertem Stück. [1)]

Neben der veränderten z-Situation hat aber auch der Zeitpunkt der Unterbrechung der Leistungserstellung Einfluß auf den Faktorverzehr. Denn durch den Bruch eines Werkzeuges kann das Werkstück vollständig verdorben sein ohne Möglichkeit der Weiterverarbeitung, oder aber es kann nach Ersetzung des defekten Werkzeuges die Produktion an der Stelle wieder aufgenommen werden, an der sie unterbrochen wurde.

Den unterschiedlichen Arten der Leistungserstellung entsprechend, ergeben sich die jeweiligen Auswirkungen, die wir jedoch in folgende 3 Kategorien einteilen können:

Der bisherige Faktorverbrauch ist

(1) ganz verloren
(2) teilweise weiterverwendbar
(3) vollständig weiterverwendbar

Der völlige Verlust des Faktoreinsatzes wird bei Fertigungsbetrieben immer mehr an Bedeutung verlieren, da heute durch die Verknappung und Verteuerung der Rohstoffe die Entwicklung von Recycling-Technologien verstärkt vorangetrieben wird.

Zusätzlich können auch Folgewirkungen bei unvorhergesehenen Veränderungen während der Leistungserstellung auftreten, die zu einer Unterbrechung führen. Diese Folgen können sogar weiterreichende Konsequenzen haben als die zuerst eingetretene Veränderung. So kann z.B. das Bedienungspersonal verletzt werden, wenn ein Druckschlauch platzt, oder bei Bruch eines Lagers werden durch die losen Teile andere Elemente ebenfalls beschädigt, die eine komplizierte Reparatur erforderlich machen oder sogar den Ersatz der ganzen Anlage notwendig werden lassen.

---

1) Albach [3] , S.190 weist auch auf diesen Zusammenhang hin, beschränkt sich dann aber auf zeitabhängige Verbrauchsfaktormengen und zeitinvariante Potentialfaktormengen.

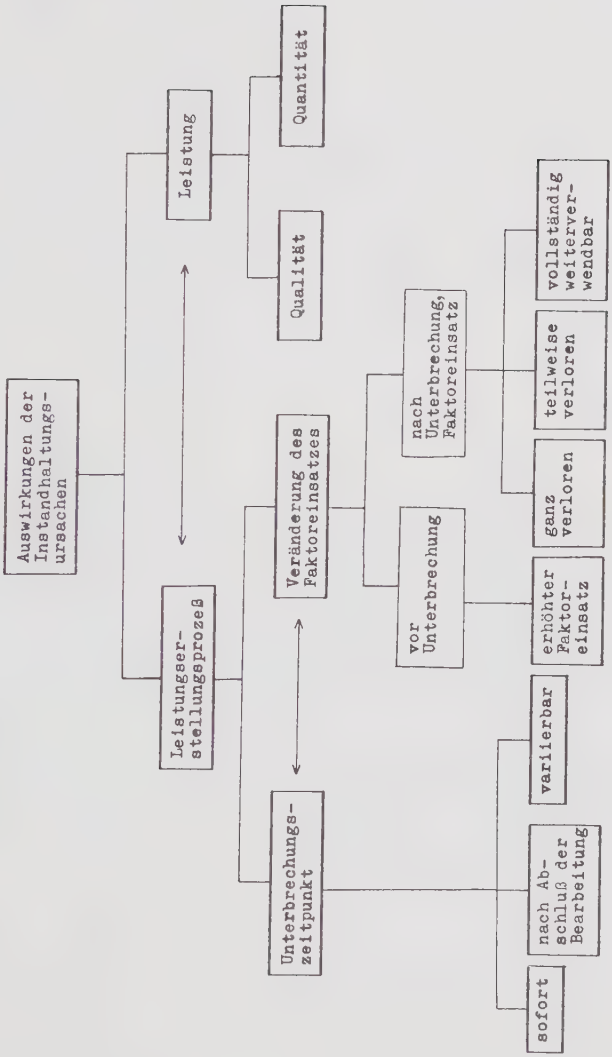

Auswirkungen der Instandhaltungs-ursachen
Leistungser-stellungsprozeß
Leistung
Quantität
Qualität
Veränderung des Faktoreinsatzes
nach Unterbrechung, Faktoreinsatz
vor Unterbrechung
ganz verloren
teilweise verloren
vollständig weiterver-wendbar
erhöhter Faktor-einsatz
Unterbrechungs-zeitpunkt
variierbar
nach Ab-schluß der Bearbeitung
sofort

Tabelle 1

2.3.2 AUSWIRKUNGEN AUF DIE BETRIEBLICHEN LEISTUNGEN

Außer auf den Prozeß der Leistungserstellung können die Instandhaltungsursachen auch auf die betriebliche Leistung selbst einwirken. Dieser Einfluß kann sich sowohl in der Qualität wie auch in der Menge der erzeugten Leistung bemerkbar machen. Denn Verschmutzung oder Verschleiß können bei konstantem Faktoreinsatz die Quantität der erstellten Leistung zurückgehen lassen. Dieses Absinken der Output-Menge läßt sich oftmals durch einen erhöhten Faktoreinsatz ausgleichen, wodurch die Produktionsgeschwindigkeit wieder erhöht wird. Dies hat aber unter Umständen einen noch höheren Verschleiß zur Folge, so daß sich die Frage stellt, ob es nicht günstiger ist, die Leistung durch eine Instandhaltungsmaßnahme, d.h. durch eine Verbesserung der z-Situation statt durch einen höheren Faktoreinsatz zu vergrößern.

Ähnlich stellt sich das Problem bei einem qualitativen Absinken der Leistung. Dieses kann zu erhöhtem Ausschuß führen, da die Leistung den gestellten Anforderungen nicht genügt, oder zu geringeren Erlösen wegen der verminderten Qualität; die Qualitätsverschlechterung kann eventuell durch zusätzliche Aufwendungen, wie erneutes Schleifen, Nacharbeiten etc. beseitigt werden. Dieser Mehraufwand könnte durch Instandhaltungsaktionen vermieden werden. Es ist jedoch genau zu untersuchen, ob es besser ist, die Qualitätsverbesserungen durch zusätzliche Leistungen zu erreichen oder Erlöseinbußen in Kauf zu nehmen, oder ob es günstiger ist, Instandhaltungsmaßnahmen zu ergreifen.

2.4 MASSNAHMEN DER INSTANDHALTUNG

Der in der Einleitung zugrundegelegte Instandhaltungsbegriff ist als Oberbegriff aufzufassen, der einer genaueren Erläuterung bedarf, welche Maßnahmen darunter subsumiert werden.

Um die Instandhaltungsaktionen zu systematisieren, teilen wir sie zunächst in zwei Gruppen ein: [1]

a) vorbeugende Instandhaltung
b) Instandsetzung

Die vorbeugende Instandhaltung soll unvorhergesehene Ausfälle und Schäden verhindern und zur Erhaltung und Verbesserung der betrieblichen Leistungsfähigkeit [2] dienen. Hierunter fallen folgende Maßnahmen: [3]

a_1) Inspektion
a_2) Wartung
a_3) vorbeugender Austausch/Überholung

Die Inspektion erstreckt sich auf die Überprüfung und Überwachung der Funktionsfähigkeit des Betriebsmittelstandes, die Feststellung von Beschädigungen, Verschleiß oder Ausfällen innerhalb der Betriebsmittel. Die Inspektion veranlaßt dann entsprechend den Schadensfeststellungen weitere Instandhaltungsaktionen.

Wartung [4] ist die routinemäßige Pflege der Betriebsmittel entsprechend der Hersteller oder eigener Erfahrungen, wie z.B. Reinigen, Schmieren, Korrosionsschutz, Justierung jedoch ohne jeglichen Teileaustausch.

---

1) vgl. Arbeitskreis Instandhaltung [5], S.11 ; Bussmann, Kress, Kuhn [16], S.32; Kruse, Redeker [86] S.9 ff; Mertens [102] S.807f
2) Verbesserung jedoch nicht über die Leistungsfähigkeit der ehemals neuen Anlage hinaus.
3) vgl. Schelo [147], S. 19ff; Kress, H. [85], S. 27ff
4) Kistner [78], S.18 faßt den Begriff der Wartung weiter und schließt die gesamte vorbeugende Instandhaltung mit ein. Hier wird eine feinere Einteilung der Maßnahmen gewählt, da sie unterschiedliche Kostenstrukturen haben.

Der vorbeugende Austausch umfaßt den Einbau neuer wie auch überholter Teile vor einem technischen Versagen der Betriebsmittel. Dieser vorbeugende Austausch kann auch einen ganzen Betriebsmittelkomplex, wie z.B. größere maschinelle Anlagen umfassen. Ebenso dient die vorbeugende Überholung einer Verhinderung von Ausfällen und Schäden an den Betriebsmitteln.

Die Instandsetzung dagegen ist eine ausfall-und schadenbehebende Maßnahme beim Auftreten von Funktionsstörungen im Betriebsmittelstand, um den funktionsfähigen Zustand wieder herzustellen. Hierunter erfaßt man folgende Arbeiten:

b_1) Reparatur ohne Teileaustausch
b_2) Ersetzung schadhafter Teile, Überholung

Reparatur ohne Teileaustausch erstreckt sich auf alle Arbeiten, die einen Ausfall oder Schaden ohne den Einbau neuwertiger, leistungsverbessender Teile beseitigen, z.B. Festziehen von Muttern und Schrauben, Lösen verklemmter Teile, Wiederanlöten elektrischer Kontakte etc..

Die Ersetzung schadhafter Teile umfaßt den Einbau neuer wie überholter oder gebrauchter Teile, um die Ausfallursachen zu beseitigen und die Leistungsfähigkeit wiederherzustellen. Gleichzeitig kann eine Überholung des gesamten Betriebsmittelstandes erfolgen, so daß die Überholung sowohl eine vorbeugende Maßnahme sein kann als auch erst nach einem Ausfall durchgeführt werden kann.

Der Betriebsmittelbestand, auf den die Instandhaltungsaktionen gerichtet sind, wird als Instandhaltungssystem bezeichnet. Man spricht von einem einfachen Instandhaltungssystem,[1] wenn nur eine Einheit oder ein Element innerhalb der Betriebsmittel instandgehalten wird oder wenn dies für mehrere Elemente unabhängig voneinander geschieht. Sind die Maßnahmen auf mehrere interpendente Teile gerichtet, so liegt ein komplexes Instandhaltungssystem vor.

1) vgl. Wolff [182], S.18ff

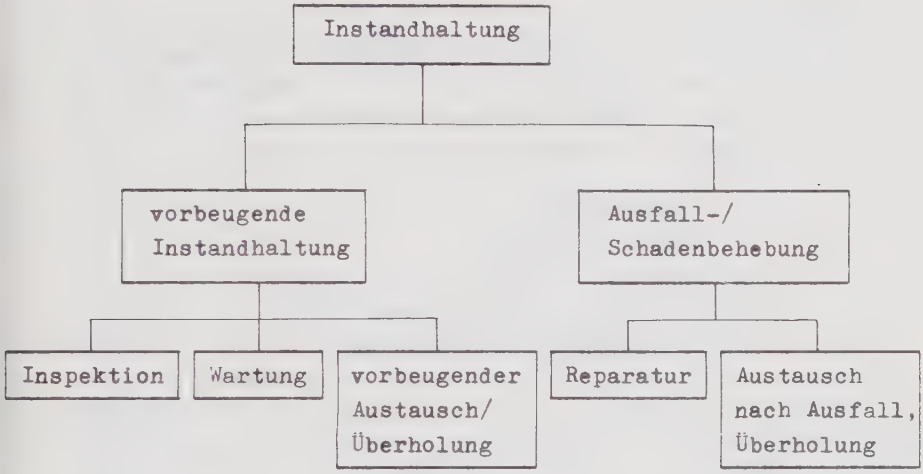


Tabelle 2: Maßnahmen der Instandhaltung

In Industriebetrieben erstreckt sich die Instandhaltung hauptsächlich auf die betrieblichen Anlagen, die man in folgende Gruppen unterteilen kann: [1]

a) bautechnische Anlagen
b) maschinelle Anlagen
c) apparative Anlagen
d) Nachrichten-und Transportanlagen
e) sonstige Anlagen

Daher spricht man auch von Anlagenerhaltung statt von Instandhaltung.[2]

Eine Instandhaltungsstrategie legt fest, welche Maßnahmen in welcher Intensität und zu welchen Zeitpunkten durchgeführt werden sollen, um die Leistungsfähigkeit wiederherzustellen oder zu erhalten. [3]

1) vgl. Redeker [126], S. 8
2) vgl. Männel [95], S. 25ff
3) vgl. Mertens [102], S. 808; Herzig [62], S. 39; Küpper [88], S. 3

2.5 ZIELFUNKTIONEN

Den verschiedenen betrieblichen Gegebenheiten entsprechend werden die Instandhaltungsmaßnahmen für unterschiedliche Zielsetzungen geplant, Hierbei werden in der Literatur [1] folgende fünf Zielfunktionen behandelt:

(1) Gewinnmaximierung
(2) Kostenminimierung
(3) Wirtschaftlichkeitsmaximierung
(4) Nutzungsgradmaximierung
(5) Zuverlässigkeitsmaximierung

Da sowohl das Auftreten der Instandhaltungsursachen wie auch deren Beseitigung durch entsprechende Maßnahmen von zufälligen Ereignissen beeinflußt werden, fassen wir die entsprechenden Kosten, Nutzungs-und Stillstandszeiten als stochastische Größen auf. Für das Verhalten des Entscheidungsträgers unterstellen wir Risikoneutralität, d.h. er hat gegenüber allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zielfunktion mit dem gleichen Mittelwert weder Risikosympathie noch Risikoaversion.[2] Daher optimieren wir bei den Zielfunktionen jeweils die entsprechenden Erwartungswerte.

Die direkte Erfassung von Gewinngrößen stößt in vielen Unternehmen auf große Schwierigkeiten, da die Zurechnung von Gewinnanteilen auf vorgelagerte Produktionsstufen i.a. nur in einer groben Abschätzung möglich ist. Die zeitlichen Veränderungen der Gewinnsituation durch kurzfristige Preisschwankungen auf den Absatzmärkten können in der Regel bei der Instandhaltungsplanung nicht berücksichtigt werden, da sie längerfristig angelegt ist. Deswegen rechnen wir mit einem durchschnittlichen Bruttogewinn G pro Produktionszeiteinheit

---

1) vgl. Jorgenson, Mc Call, Radner [73], S. 15 ff; Mertens [102], S. 809 ff; Scheer [146], S. 69 ff; Schelo [147], S. 37 ff

2) Risikosympathie bzw. Risikoscheu werden von Schneeweiß [148] S. 45 ff mit Hilfe von Sicherheitsäquivalenten definiert, die das jeweilige subjektive Risikoverhalten wiederspiegeln.

bzw. pro produziertem Stück, von dem die Kosten, die durch die Instandhaltungsursachen und deren Beseitigung hervorgerufen werden, noch abzuziehen sind.[1] Wir gehen davon aus, daß die abzusetzende Menge den Preis nicht beeinflußt, wie es auf einem polypolistischen Markt der Fall ist.

Unterliegt der Gewinn erfaßbaren Veränderungen z.B. auf Grund von Schwankungen in der Produktionsgeschwindigkeit oder der Produktqualität, so kann er als Funktion G(t) aufgefaßt werden. Diese Schwankungen wollen wir jedoch in den Betriebskosten erfassen, indem wir mit einem konstanten Bruttogewinn G rechnen und G-G(t) als Opportunitätskosten zu den entstehenden Kosten hinzurechnen.[2]

Die Zielfunktion der Gewinnmaximierung pro Zeiteinheit lautet dann:

$$(2.5.1) \qquad \frac{G \cdot LZ - LK - SK}{BZ} \longrightarrow \max!$$

BZ ist die gesamte Betriebszeit, die sich aus der Laufzeit LZ, in der die Leistung erstellt wird, und der Stillstandszeit SZ zusammensetzt. LK sind die Laufzeitkosten, die während der Leistungserstellung durch die Instandhaltungsursachen anfallen wie z.B.erhöhter Faktorverzehr etc.; SK bezeichnet die Stillstandskosten, die durch die Maßnahmen der Instandhaltung entstehen.

Diese Zielfunktion der Gewinnmaximierung läßt sich jedoch auch in ein äquivalentes Problem der Kostenminimierung umformen. Denn (2.5.1) läßt sich transformieren zu:

$$G - \frac{LK+SK+G \cdot SZ}{BZ} \longrightarrow \max!$$

---

1) vgl. Jorgenson, Mc Call, Radner [73],S. 16; Wolff [182],S. 61

2) vgl. Scheer [146],S. 69

Hieraus erhält man dann die äquivalente Zielfunktion:

$$\frac{LK+SK+G\cdot SZ}{BZ} \longrightarrow \min!$$

Hierbei werden zu den Kosten der Produktions-u. Stillstandszeit die Kosten für den entgangenen Gewinn als Opportunitätskosten hinzugerechnet. [1)]

Ist jedoch eine derartige Zurechnung des Bruttogewinns nicht möglich, da noch weitere Produktionsstufen folgen, Kuppelprodukte entstehen etc., so kann die Zielfunktion der Kostenminimierung in der obigen Form zu einem unerwünschten Ergebnis führen. Denn sind die durchschnittlichen Laufzeitkosten größer als die durchschnittlichen Stillstandskosten, so besteht die beste Strategie darin, fortlaufend Instandhaltungen durchzuführen ohne zwischenzeitliche Produktionsphasen. Denn aus $\frac{LK}{LZ} > \frac{SK}{SZ} > 0$ folgt:

$$\frac{LK+SK}{LZ+SZ} = \frac{LK}{LZ}\cdot\frac{LZ}{LZ+SZ} + \frac{SK}{SZ}\cdot\frac{SZ}{LZ+SZ} > \frac{SK}{SZ}\left(\frac{LZ}{LZ+SZ} + \frac{SZ}{LZ+SZ}\right) = \frac{SK}{SZ} \quad .$$

Die Kostenminimierung pro Betriebszeiteinheit liefert somit kein sinnvolles Zielkriterium, da ohne Laufzeit nur noch Kosten entstehen würden.

Ist der Gewinn nicht direkt zurechenbar, so läßt sich die Kostenminimierung dennoch durchführen, nur werden wir dann das Minimum der Kosten pro Laufzeiteinheit und nicht pro Betriebszeiteinheit ermitteln. Die Zielfunktion lautet dann:

$$\frac{LK + SK}{LZ} \longrightarrow \min!$$

---

1) vgl. Scheer[146],S. 72; Wolff[182], S. 60 f

Diese Zielfunktion ist äquivalent zur Stückkostenminimierung in der Kostenrechnung. Nehmen wir nämlich an, daß die während der Laufzeit LZ produzierte Menge P(LZ) proportional zur Laufzeit ist mit $P(LZ) = a \cdot LZ$ [1], so lautet die Zielfunktion der Stückkostenminimierung:

$$\frac{LK + SK}{a \cdot LZ} \longrightarrow \min!$$

Dies ist jedoch äquivalent zur obigen Zielfunktion. Ist die produzierte Menge nicht proportional zur Laufzeit, sondern sinkt die Leistung pro Zeiteinheit z.B. auf Grund von Verschleiß ab, so rechnen wir dies durch steigende Kosten mit ein und berücksichtigen es nicht in der erstellten Menge.

Diese Zielfunktion der Kostenminimierung pro Laufzeiteinheit ist auch äquivalent zur Maximierung des Gewinns pro Laufzeiteinheit. Denn es gilt:

$$\frac{G \cdot LZ - LK - SK}{LZ} = G - \frac{LK + SK}{LZ} \longrightarrow \max!$$

Hier wird aber im Gegensatz zur Gewinnmaximierung pro Betriebszeiteinheit der entgangene Gewinn nicht als Opportunitätskosten zu den Instandhaltungskosten hinzugerechnet, denn die äquivalente Minimierung erfolgt über die reine Laufzeit ohne Berücksichtigung der Stillstandszeiten.

Legen wir bei der Instandhaltungsplanung als Begriff der Wirtschaftlichkeit das Verhältnis von Ertrag zu Aufwand bei den Maßnahmen zu Grunde, so führt die Wirtschaftlichkeitsmaximierung unter dem Ansatz konstanter Erträge pro Zeiteinheit zu der Zielfunktion:

$$\frac{G \cdot LZ}{LK + SK} \longrightarrow \max!$$

---

1) a entspricht dann der pro Zeiteinheit erstellten Leistung.
2) Wöhe[180,S. 38 ; Korndörfer[83] S. 60 f;

Dies ist jedoch unter der Voraussetzung, daß die entsprechenden Größen positiv sind, äquivalent zur Zielfunktion der Kostenminimierung pro Laufzeiteinheit. Sind die Erträge nicht konstant, so werden ihre zeitlichen Veränderungen wieder in den entstehenden Kosten erfaßt. [1)]

Die Wirtschaftlichkeitskennzahl Gutenbergs [2)] als Verhältnis von Ist-zu Sollaufwand kann im Rahmen der hier behandelten Instandhaltungsplanung keine Verwendung finden, da ja gerade der günstigste Aufwand bestimmt werden soll. Das Verhältnis von Ist-zu Sollaufwand dient vielmehr der nachträglichen Erfassung der realisierten Größen im Vergleich zu den bestmöglichen, um die Abweichungsursachen zu ermitteln! Die Zielfunktion der Wirtschaftlichkeitsmaximierung braucht somit nicht weiter untersucht werden.

Ist die Kosten-und Gewinnanrechnung bei der betrieblichen Leistungserstellung auf die instandzuhaltenden Betriebsmittel gar nicht oder nur mit einem erheblichen Aufwand möglich, so wird man als Zielfunktion die Nutzungsgradmaximierung wählen. Unter Nutzungsgrad versteht man das Verhältnis der Laufzeit zur gesamten Betriebszeit. Die Ermittlung der einzelnen Zeitgrößen bereitet i.a. im Gegensatz zur Feststellung der Gewinn- und Kostenwerte keine großen Schwierigkeiten, so daß die Nutzungsgradmaximierung ein einfach zu handhabenes Kriterium ist. Sind außerdem die Laufzeit-und Stillstandskosten proportional der aufgewandten Zeit mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor, so ist die Nutzungsgradmaximierung äquivalent zur Kostenminimierung pro Laufzeiteinheit. [3)] Dieses Ergebnis gilt jedoch keineswegs, wenn die Kosten zwischen geplanter und unvorhergesehener Instandhaltung stark differieren oder die Kosten nicht zeitproportional sind.

---

1) vgl. oben

2) vgl. Gutenberg[54], S. 31f; Gutenberg lehnt den obigen Begriff der Wirtschaftlichkeit ab, da er zu einer "Vermengung von Wirtschaftlichkeits-und Rentabilitätsvorstellungen" führe. Wie gezeigt, wird er auch für die Instandhaltungsplanung nicht benötigt.

3) vgl. Mertens[102], S. 811ff; siehe auch Scheer[146], S. 75f

Die Maximierung der Zuverlässigkeit [1] einer Anlage ist von großer Bedeutung im militärischen Bereich sowie bei der Luft-undRaumfahrt und bei der Planung neuer Anlagen. Sie wird im Rahmen einer eigenen Zuverlässigkeitstheorie untersucht. Daher wird in dieser Arbeit nicht darauf eingegangen, und es sei auf die entsprechende Literatur verwiesen. [2] Man kann eine hohe Zuverlässigkeit auch durch Kostenminimierung erreichen, indem die Kosten für eine unvorhergesehene Unterbrechung entsprechend hoch angesetzt werden, so daß die vorbeugenden Maßnahmen im Vergleich sehr kostengünstig sind.

Die Auswahl der Zielfunktion wird sich nach den jeweiligen Betriebsverhältnissen richten müssen und ist abhängig von der Verfügbarkeit der erforderlichen Daten. In der weiteren Untersuchung von Instandhaltungsmodellen werden wir uns aus den dargelegten Gründen auf die Zielfunktion (1),(2) und (4) beschränken.

---

1) Zu den verschiedenen Begriffen der Zuverlässigkeit vgl. Barlow, Proshan [10] S. 5 ff

2) vgl. Barlow, Proshan [10]; Gnedenko, Beljajew, Solowjew [46]; Rinne [127]; Störmer [156]

3. STOCHASTISCHE PROZESSE

"Ein stochastischer Prozeß ist die mathematische Abstraktion eines realen Prozesses, der in seiner Entwicklung durch zufällige Ereignisse beeinflußt wird." [1]

Zufällige Ereignisse im Zeitablauf wirken auch auf die Lebensdauer, die Kosten und die Erlöse komplexer Anlagen ein, so daß sich die stochastischen Prozesse als Beschreibung dieser Vorgänge anbieten.

Definition 3.1 : Ein stochastischer Prozeß ist eine Familie von zufälligen Variablen $(X_t)_{t \in T}$ über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{Y}, P)$ mit dem meßbaren Bildraum $(S, \hat{\mathcal{Y}})$ und der Indexmenge T. [2]

Bei der Behandlung der Instandhaltungsprobleme werden wir uns auf den Bildraum $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ mit dem zugehörigen Borelkörper beschränken. Außerdem wird die Indexmenge T den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entsprechen. Man bezeichnet dann den Prozeß als reellwertigen stochastischen Prozeß mit diskretem Parameter bzw. mit stetiger Zeit.

Definition 3.2 : Ein stochastischer Prozeß heißt stationär, wenn seine endlichdimensionalen Verteilungen zeitinvariant sind, d.h. die gemeinsame Verteilung von $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ ist gleich der von $X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}$ für beliebige $t_i \in T$, $h > 0, n \in \mathbb{N}$. [3]

Definition 3.3 : Ein stochastischer Prozeß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Erneuerungsprozeß, wenn die $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten, nicht negativen zufälligen Größen sind. [4]

Man bezeichnet dies auch als normalen oder gewöhnlichen Erneuerungsprozeß. [5]

---

1) siehe Doob [30] , S.V
2) vgl. Doob [30] S. 46, Ross [133] , S. 10
3) vgl. Doob [30] S. 94, Prabhu [119] , S. 7
4) vgl. Cox [21] , S. 25, Smith [141] , S. 9
5) vgl. Wolff [182] , S. 9, Störmer [156] , S. 64

Ein Erneuerungsprozeß kann z.B. zur Beschreibung der Lebensdauer einer Anlage verwendet werden, die nach ihrem Ausfall immer wieder durch eine identische ersetzt wird. Daher bezeichnet man X_n als die Lebensdauer oder Laufzeit [1] des Systems und das Ende der Laufzeit als Ausfall; entsprechend heißt die gemeinsame Verteilungsfunktion F der $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Lebensdauer -, Laufzeit - oder Ausfallverteilung.[2]

Bei empirischen Untersuchungen des Ausfallverhaltens von Fertigungsmaschinen, elektronischen Rechenanlagen, Radaranlagen und anderen technischen Systemen [3] haben sich folgende Verteilungen zur Erfassung der Lebensdauer bewährt: [4]

(1) Weibullverteilung mit der Dichtefunktion

$$f(t) = \lambda \cdot \alpha t^{\alpha - 1} e^{-\lambda t^{\alpha}}$$

$$\lambda > 0, \alpha > 0, t \geq 0$$

(2) Gammaverteilung

$$f(t) = \lambda (\lambda t)^{\alpha - 1} e^{-\lambda t} / \Gamma(\alpha)$$

$$\lambda > 0, \alpha > 0, t \geq 0$$

---

1) Laufzeit und Lebensdauer bzw. Alter eines Sxstems müssen nicht identisch sein, da bei der Laufzeit die Stillstandszeiten nicht berücksichtigt sind.
2) vgl. Scheer [146] , S. 36
3) vgl. Bürk [14], Graef, Schubring [49] , Horne [64] , Horne, Scott [65], Redeker [126] ; Rusch [134] " Schreiber [153]
4) Diese Verteilungen sind ausführlicher beschrieben in: Barlow, Proshan [10] , S. 13 ff; Cox [21] , S. 15 ff; Jorgenson, Mc Call, Radner [73] , S. 138 ff, Kistner [78], S. 30 ff, Wolff [182] , S. 129 ff

(3) Logarithmische Normalverteilung

$$f(t) = \frac{1}{t \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\log t - \mu)^2\right]$$

$o \leqq \mu < \infty, \sigma > o, \; t \geqq o$

(4) Abgeschnittene Normalverteilung

$$f(t) = \frac{1}{a \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$o \leqq \mu < \infty, \sigma > o, \; t \geqq o$, a Normierungsfaktor

(5) Exponentialverteilung

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$\lambda > o, \; t \geqq o$

Die Exponentialverteilung ist hier eigens aufgeführt, obwohl sie sich als Spezialfall sowohl der Weibull- wie auch der Gammaverteilung darstellen läßt ($\alpha = 1$), da sie sich auf Grund von empirischen Untersuchungen zur Beschreibung des Ausfall - verhaltens komplexer Anlagen besonders eignet. [1] Dies ergibt sich auch aus einigen theoretischen Abhandlungen zum Problem zusammengesetzter Anlagen, in denen unter allgemeinen Voraussetzungen nachgewiesen wurde, daß die Ausfallverteilung eines aus n unabhängigen , nicht notwendig identischen Teilen bestehenden Systems bei einer unendlich langen Laufzeit und $n \to \infty$ gegen die Exponentialverteilung strebt. [2]

---

1) vgl. Redeker [126] S. 61 ff; Graef, Schubring [49]

2) vgl. Barlow-Proshan [10], S. 18 ff, Cox, Smith [22], S. 96 f; Drenik [32] ; Ososkov [118] ;

Die statistischen Methoden zur Ermittlung der Lebensdauerverteilung aus empirischen Daten sollen hier nicht näher behandelt werden. Hierzu sei verwiesen auf die empirischen Untersuchungen und die statistischen Lehrbücher. [1]

Äquivalent zur Angabe der Ausfallverteilung kann man den Erneuerungsprozeß auch durch die Zuverlässigkeitsfunktion $\overline{F}$ beschreiben, [2] die angibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Element das Alter x erreicht, d.h.

$$\overline{F}(x) := 1 - F(x)$$

Im folgenden wollen wir voraussetzen, daß $P\{X_n \neq o\} > o$, da der Fall $P\{X_n = o\} = 1$ zu dem ökonomisch uninteressanten Prozeß führt, daß die Anlage mit Wahrscheinlichkeit eins keine Laufzeit hat. Außerdem soll die Ausfallverteilung absolut stetig sein [3] mit der Dichtefunktion f.

Ein Erneuerungsprozeß kann dann ebenfalls durch die Angabe der Ausfallrate ϕ charakterisiert werden. Sie ist definiert als

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

d.h. $\phi(x)\,dx$ kann aufgefaßt werden als bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ausfalles im nächsten Augenblick unter der Bedingung, daß das Alter t erreicht wurde. [4]

Ausfallrate und Lebensdauerverteilung bedingen sich gegenseitig eindeutig, denn es gilt [5]

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\int_o^x \phi(t)dt\right] .$$

---

1) vgl. Gnedenko-Beljajew-Solowjew [46] ; Küpper [88] , S.359 ff; Störmer [156] , S. 254 ff; Volodin [174] ; Witting [179]
2) vgl. Cox [21] , S. 3
3) zum Begriff der absoluten Stetigkeit von Verteilungen vgl. Vogel [173] , S. 124 ff
4) vgl. Cox [21] , S. 9; Küpper [88] , S. 19; Scheer [146] , S. 44; Wolff [182] , S. 46
5) vgl. Barlow-Proshan [10] , S. 12; Gertsbakh, Kordansky [42], S. 132 f

Somit ist ein Erneuerungsprozeß eindeutig festgelegt durch eine der folgenden Größen:

(1) Laufzeitdichte f
(2) Ausfallverteilung F
(3) Zuverlässigkeitsfunktion $\bar{F}$
(4) Ausfallrate ϕ

Bei den Erneuerungsprozessen kann man auch Erneuerungszeiten berücksichtigen, die ebenfalls einen Erneuerungsprozeß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden.
Die zufälligen Größen $Z_n = X_n + Y_n$ bilden dann wiederum einen Erneuerungsprozeß, den man auch als alternierenden Erneuerungsprozeß oder Erneuerungsprozeß mit Stillstandszeiten bezeichnet.[1)]

$\$_n$ sei die n-te Partialsumme des Erneuerungsprozesses, d.h.

$$\$_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Da $\$_n$ die Zeitpunkte angibt, zu denen erneuert wird, bezeichnet man sie als Erneuerungspunkte bzw. Regenerationspunkte (regeneration - points).[2)] Diese Erneuerungspunkte haben die Eigenschaft, daß nach ihrem Eintreten der gesamte bisherige Verlauf des Prozesses keinen Einfluß auf das zukünftige Verhalten hat, d.h. der Prozeß "vergißt" an den Erneuerungspunkten seine Vergangenheit und startet von neuem.

In einem engen Zusammenhang mit $(\$_n)_{n\in\mathbb{N}}$ steht der Erneuerungszählprozeß N(t), der wie folgt definiert ist:

$$N(t) := \max\{ n/\ \$_n \leqq t,\ t>0\} \ .$$

---

1) vgl. Ross [133] , S. 42, Wolff [182] , S. 33
2) vgl. Smith [142] , S. 257

N(t) gibt die Zahl der Erneuerungen im Intervall (o,t] an und ist ebenfalls eine zufällige Größe mit endlichen Momenten. [1]

Die zu erwartende Zahl von Erneuerungen im Intervall (o,t]

$$H(t) := E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

bezeichnet man als Erneuerungsfunktion [2]; hierbei ist F_n die n-fache Faltung der Ausfallverteilung F. [3]

Die Erneuerungsprozesse haben eine Erweiterung erfahren in den kumulativen Prozessen. [4]

Definition 3.4: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei ein Erneuerungsprozeß mit den zugehörigen Regenerationspunkten $(\$_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Der stochastische Prozeß $(C_t)_{t\in T}$ $(T=\mathbb{R}^+\cup\{o\}$) heißt kumulativer Prozeß , falls gilt:

(1) $K_n := C_{\$_n} - C_{\$_{n-1}}$ $(n\in\mathbb{N}, \$_o=o)$ ist eine Folge von unabhängigen, identisch-verteilten Zufallsvariablen.

(2) C_t ist in jedem endlichen t-Intervall von beschränkter Variation mit Wahrscheinlichkeit eins.

(3) Es sei

$$\tilde{C}_t := \int_o^t |d\, C_\tau|$$

$\tilde{C}_t$ erfüllt die Bedingung (1).

Der kumulative Prozeß wird somit durch den zugrunde liegenden Erneuerungsprozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gesteuert, der für den kumulativen Prozeß ebenfalls $(\$_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Regenerationspunkte erzeugt .

---

1) vgl. Prabhu [119] , S. 155 ff
2) vgl. Doob [19] , S. 422 ff; Smith [142] , S. 245 f; Wolff [182] , S. 26
3) zur Definition der Faltung vgl. Vogel [173] , S. 119
4) vgl. Smith [141] , S. 22 ff; Smith [142] , S 262 ff

Dies kann nun für die weitere Behandlung der Instandhaltungsprobleme ausgenutzt werden, indem man den Prozeß C_t als die bis zum Zeitpunkt t entstehenden Kosten oder Gewinne interpretiert; die Kosten bzw. der Gewinn hängen von dem Erneuerungsprozeß ab.

Zentrale Bedeutung bei der Untersuchung des Verhaltens von Instandhaltungssystemen hat der folgende Satz:

Satz 3.5: (Smith)[1]

Der Erneuerungsprozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe den endlichen Erwartungswert μ. Der stochastische Prozeß $\tilde{K}_n := \tilde{C}_{\$_n} - \tilde{C}_{\$_{n-1}}$ besitze den endlichen Erwartungswert $\tilde{\kappa}$, und κ sei der Erwartungswert von K_n.

Dann gilt:

$$(1) \qquad E\left(\sum_{n=1}^{N(t)+1} K_n\right) = \frac{\kappa}{\mu} t + o(t)$$

$$(2) \qquad E(C_t) = \frac{\kappa}{\mu} t + o(t)$$

für $t \to \infty$ und $K_o = 0$.

Dieser Satz ermöglicht es uns, Aussagen über das Verhalten der Erneuerungsprozesse bei unendlichem Zeithorizont zu machen, da das Cesaro-Mittel gegen $\frac{\kappa}{\mu}$ konvergiert und wir somit nur noch diesen Quotienten der Optimierungsentscheidung zugrunde legen müssen. Außerdem beinhaltet der Satz, daß der Prozeß für $t \to \infty$ in einen stationären Zustand übergeht. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man direkt das elementare Erneuerungstheorem, indem man $C_t = N(t)$ setzt:[2]

---

1) vgl. Smith [141] , S. 23, S. 28, Smith [142] ,S. 262 f
2) vgl. Smith [142] , S. 262

zeugt. Dies kann nun für die weitere Behandlung der Instandhaltungsprobleme ausgenutzt werden, indem man den Prozeß C_t als die bis zum Zeitpunkt t entstehenden Kosten oder Gewinn interpretiert; die Kosten bzw. der Gewinn hängen von dem Erneuerungsprozeß ab.

Zentrale Bedeutung bei der Untersuchung des Verhaltens von Instandhaltungssystem hat der folgende Satz:

Satz 3.5 : (Smith) [1] :

Der Erneuerungsprozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe den endlichen Erwartungswert μ. Der stochastische Prozeß $\tilde{K}_n := \tilde{C}_{S_n} - \tilde{C}_{S_{n-1}}$ besitze den endlichen Erwartungswert $\tilde{\kappa}$, und κ sei der Erwartungswert von K_n.

Dann gilt:

$$(1) \qquad E\Big(\sum_{n=1}^{N(t)+1} K_n\Big) = \frac{\kappa}{\mu} t + o(t)$$

$$(2) \qquad E(C_t) = \frac{\kappa}{\mu} t + o(t)$$

für $t \to \infty$ und $K_o = 0$.

Dieser Satz ermöglicht es uns, Aussagen über das Verhalten der Erneuerungsprozesse bei unendlichem Zeithorizont zu machen, da das Cesaro-Mittel gegen $\frac{\kappa}{\mu}$ konvergiert und wir somit nur noch diesen Quotienten der Optimierungsentscheidung zugrunde legen müssen. Außerdem beinhaltet der Satz, daß der Prozeß für $t \to \infty$ in einen stationären Zustand übergeht. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man direkt das elementare Erneuerungstheorem, indem man $C_t = N(t)$ setzt: [2]

---

1) vgl. Smith [140] S.23, S.28
Smith [141] S.262 f

2) vgl. Smith [141] S.262

Satz 3.6 : (Elementares Erneuerungstheorem)

Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Erneuerungsprozeß mit endlichem Erwartungswert μ, so gilt für die Zahl der zu erwartenden Erneuerungen pro Zeiteinheit:

$$\frac{H(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu},$$

falls $t \to \infty$.

4. INSTANDHALTUNGSMODELL 1

Nachdem nun die mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt worden sind, die wir zur Erfassung der Instandhaltungs - systeme benötigen, werden wir zunächst einige allgemeine Charakteristiken angeben, die ein Instandhaltungssystem näher beschreiben . Anschließend werden dann an Hand dieser Charakteristiken die Modelle beschrieben und be - züglich der Zielfunktion auf notwendige wie auch hin - reichende Optimalitätsbedingungen hin untersucht.

4.1. ALLGEMEINE SYSTEMCHARAKTERISTIK

Ein Instandhaltungssystem wird durch folgende Größen näher charakterisiert:

(1) Art, Beschaffenheit und Zahl der Elemente, Einheiten, Baugruppen o.ä.,aus denen das komplexe System zusammen- gesetzt ist.

(2) Zahl und Abfolge der einzelnen Zustände, die von den Systemteilen und dem Gesamtsystem durchlaufen werden, und deren Verweildauer in den einzelnen Zuständen.

(3) Interdependenzen zwischen den Systemteilen und deren Auswirkungen auf das Gesamtsystem; d.h. welche Ein- flüsse üben Zustandsänderungen einzelner Teile auf die übrigen Elemente aus,und wie reagiert das Gesamtsystem hierauf.

(4) Informationsstand, den man über den Zustand der ein- zelnen Elemente und der gesamten Anlage hat,und wie man sich diesen verschafft, z.B. durch dauernde Beo- bachtungen, regelmäßige Inspektionen etc..

(5) Eingriffsmöglichkeiten ins Instandhaltungssystem,d.h. welche Instandhaltungsstrategie angewendet wird.

4.2 MODELLBESCHREIBUNG

Auf der Grundlage der in 4.1. dargestellten Systemcharakteristik soll nun das Modell näher beschrieben werden:

(1) Das Instandhaltungssystem bestehe aus beliebig vielen Elementen, Teilen, Baugruppen o.ä., die man jedoch in drei Gruppen unterteilen kann:

In der Gruppe 1 (G1) faßt man alle Elemente zusammen, deren Ausfall mit einer minimalen Reparatur behoben werden kann. Minimale Reparaturen bedeuten, daß das System so schnell wie möglich wieder in einen betriebsbereiten Zustand versetzt wird und daß durch den Ausfall und die anschließende Instandsetzung das Ausfallverhalten der Elementgruppe nicht verändert wird.[1)]

Besitzt diese Gruppe der Elemente die stetige Ausfallrate ϕ_M, so heißt dies, daß nach einem Ausfall zum Zeitpunkt t und anschließender minimaler Reparatur die Ausfallrate zum Zeitpunkt t_1 der Wiederinbetriebnahme gleich der zum Ausfallzeitpunkt t ist, d.h. $\phi_M(t) = \phi_M(t_1)$.

Die Instandhaltungsgruppe 2 (G2) umfaßt alle Elemente, deren Ausfall einen Ersatz oder eine Überholung der gesamten Anlage ,d.h.,einschließlich der Elemente aus Gruppe 1, nach sich zieht. Bei einer Ersetzung wird ein identisches, neuwertiges System verwandt; eine Überholung soll die Anlage ebenfalls in einen neuwertigen Zustand versetzen.

Besteht die Gruppe z.B. nur aus einem Element, so ist die Ausfallverteilung F der Gruppe identisch mit der Ausfallverteilung dieses Elementes. Bei mehreren voneinander unabhängig ausfallenden Elementen entspricht F der Verteilung des Minimums der Laufzeit aller Elemente.

1) vgl. Barlow, Hunter [8],S. 91; Barlow, Proshan[10],S. 96; Wolff[182]S. 95

In der Gruppe 3 (G3) sind die Elemente vereinigt, die von Zeit zu Zeit neu justiert werden müssen. Hierbei nehmen wir zunächst an, daß diese Gruppe nur aus einem Element besteht, bzw. daß alle Elemente dieser Gruppe gleichzeitig justiert werden müssen, so daß wir sie als ein Element auffassen können. [1)]

Als Beispiel betrachte man: Spanabhebende Maschinen, Drehbänke, Fräsanlagen etc.. Die Arbeitsgenauigkeit erfordert von Zeit zu Zeit eine Justierung der Arbeitsköpfe bzw. den gesamten Austausch. Zwischenzeitlich treten Produktionsstörungen auf, weil sich z.B. Befestigungsschrauben gelockert haben, das Kühlflüssigkeitssystem ausgefallen ist, der Vorschub defekt ist etc.. Diese Ausfallursachen sind dann i.a. mit geringem Aufwand schnell zu beheben bzw. werden zum Teil nur provisorisch beseitigt, da man bis zur nächsten Generalüberholung mit dieser aufwendigen Reparatur warten will.

(2) Die Elemente des Instandhaltungssystems besitzen nur die beiden Zustände: in Betrieb und Stillstand. Diese beiden Zustände werden abwechselnd angenommen. Einzelne Verschleißstufen werden bei den Zuständen nicht berücksichtigt, sondern finden durch die Kosten Eingang ins Modell. [2)]

Das Gesamtsystem besitze ebenfalls nur diese beiden Zustände. Die Verweildauer wird durch stochastische Variable wiedergegeben, die jedoch von der Instandhaltungsstrategie abhängen. [3)]

---

1) Diese einschränkende Annahme werden wir in Modell 2 aufheben!

2) vgl. S.47ff

3) vgl. S.43ff

(3) Ist ein Element des Systems nicht mehr funktionsfähig, so steht die ganze Anlage still. Drückt man den Zustand der einzelnen Elemente und des gesamten Systems durch die Variablen S_i bzw. S aus, die den Wert 1 für in Betrieb und 0 für Stillstand annehmen, so bezeichnet man die S_i als Boolesche Variable.[1] Mit ihrer Hilfe läßt sich der Zustand S des Gesamtsystems als Boolsche Funktion der einzelnen Elemente darstellen.

$$S(S_1,..,S_n) = \prod_{i=1}^{n} S_i$$

(4) Der Zustand des gesamten Systems sei zu jedem Zeitpunkt bekannt. Außerdem sei man immer informiert, ob das System durch einen Ausfall eines Elementes oder durch einen externen Eingriff stillgelegt worden ist.

Unter der Stillegung durch einen externen Eingriff werden alle die Unterbrechungen verstanden, die nicht durch einen Ausfall eines Anlagenteils verursacht wurden, z.B. Stillegungen zur Durchführung von vorbeugenden Instandsetzungsmaßnahmen, Stromausfall, Betriebsruhe, Streik etc.

Wir werden jedoch im folgenden alle diejenigen Unterbrechungen, die nicht durch einen Ausfall bedingt sind oder zur Instandsetzung dienen, also z.B. Betriebsruhe, Stromausfall, Kurzarbeit etc. nicht weiter berücksichtigen unter der Voraussetzung, daß hierdurch das Ausfallverhalten der Elemente nicht beeinflußt wird. Somit wechseln sich dann Laufzeiten und Stillstandszeiten zur Durchführung von Instandhaltungsmaßnahmen ab.

---

1) vgl. Störmer[156], S.106 f

Bei einem Ausfall der Anlage muß jedoch nicht bekannt sein, welches Element diesen Ausfall verursacht hat. Zur Ermittlung der Ausfallursache kann vielmehr eine Inspektion der gesamten Anlage notwendig sein, um dann erst festzustellen, ob der Fehler mit einer minimalen Reparatur behoben werden kann oder ob ein vollständiger Ersatz notwendig ist.

(5) Bei jedem Stillstand der Anlage, der durch einen Ausfall verursacht wird, stellt man zunächst fest, ob dieser Ausfall einen Ersatz bzw. eine Generalüberholung des gesamten Systems erforderlich macht oder ob er mit minimaler Reparatur beseitigt werden kann und welches Element dazu instandzusetzen ist.

Der Ersatz bzw. die Generalüberholung macht auch die Justierung der entsprechenden Elemente aus Gruppe 3 notwendig, so daß anschließend von einer neuwertigen Anlage ausgegangen werden kann, die das gleiche Ausfallverhalten besitzt wie die vorherige. Die minimale Reparatur umfaßt die Erneuerung anderer Teile und deren Justierung nicht.

Zu jedem Zeitpunkt soll außerdem die Möglichkeit bestehen, die Anlage stillzulegen und eine Justierung vorzunehmen. Dies wird dann allerdings mit einer vorbeugenden Instandsetzung des gesamten Systems verbunden. Somit geschehen Justierung und Instandsetzung jeweils gleichzeitig, jedoch einmal ausfallbedingt, zum anderen vorbeugend.

Im folgenden soll nun untersucht werden, wie man diesen Zeitpunkt für Justierung und vorbeugende Instandhaltung optimal (im Sinne der zugrundeliegenden Zielfunktion) bestimmt.

Hierzu werden zwei Strategien untersucht:
(i) Laufzeitabhängige Strategie
(ii) Kostenabhängige Strategie

Bei der laufzeitabhängigen Strategie wird die Länge der Laufzeit optimal bestimmt, bei deren Erreichung ohne einen Ausfall eines Elementes aus Gruppe 2 eine vorbeugende Instandhaltung durchgeführt wird. Laufzeit ist hier die Zeit, in der die Anlage in Funktion ist ohne jegliche Stillstandszeiten, weder ausfallbedingt noch auf Grund externer Eingriffe.

Bei der kostenabhängigen Strategie dagegen wird eine obere Kostenschranke optimal festgelegt für die während der Laufzeit anfallenden Kosten; steigen nun die Laufzeitkosten bis zu dieser Schranke an, ohne daß vorher ein Element der Gruppe 2 ausgefallen ist, so wird dann eine vorbeugende Instandsetzung ausgeführt.

4.3 LAUFZEITABHÄNGIGE STRATEGIE

Die reine Laufzeit der n-ten Anlage ohne die zwischenzeitlichen Unterbrechungen für minimale Reparaturen [1] wird bei der n-ten Anlage nur durch die Elemente der Gruppe 2 bestimmt.

Die Zeit bis zu einem Ausfall der n-ten Anlage, der durch ein Element aus G2 verursacht wird, läßt sich durch eine stochastische Variable X_n erfassen. Da wir nach einer Instandsetzung auf Grund eines Ausfalls in G2 eine neuwertige Anlage mit dem gleichen Ausfallverhalten wie die vorherige haben, lassen sich alle Systeme in ihrem Verhalten durch eine gemeinsame Ausfallverteilung beschreiben. Die Laufzeiten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sollen die Ausfallverteilung F mit $F(0+) = 0$, die Ausfalldichte f und die Ausfallrate ϕ besitzen. Gesucht ist nun eine optimale Folge von Laufzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nach denen das n-te System vorbeugend instandgehalten wird, falls nicht vorher schon ein Element aus G2 ausgefallen ist.

Die tatsächliche Laufzeit des n-ten Systems ist dann

$$(4.3.1) \qquad LZ_n(T_n) = \min\{X_n, T_n\}$$

Da wir jedoch einen unendlichen Planungshorizont unterstellen, kann eine periodische Strategie nicht durch eine sequentielle verbessert werden. Daher ist im folgenden der optimale Zeitpunkt T gesucht, zu dem eine vorbeugende Instandsetzung durchgeführt wird.

Die Laufzeit der Anlage wird aber zwischenzeitlich durch Defekte an den Elementen aus G1 unterbrochen. Die Anzahl der Ausfälle, die bei der n-ten Anlage bis zu einem Ersatz bzw. einer Überholung mit minimaler Reparatur behoben werden, betrage $N_M(LZ_n(T))$. Die Zahl der Ausfälle ist nur von der reinen Laufzeitlänge abhängig und nicht von der Länge der zwischenzeitlichen Unterbrechungen. [2]

---

1) andere Unterbrechungen haben wir ausgeschlossen vgl.(4)
2) vgl. Eigenschaft (1),Kapitel 4.2

Beträgt die durchschnittlich für eine minimale Reparatur benötigte Zeit T_M , so hat zum Zeitpunkt eines Ersatzes die n-te Anlage das Alter:

(4.3.2) $LZ_n(T) + N_M(LZ_n(T)) \cdot T_M$

Die Unterbrechungen, die keine Instandsetzung erforderlich machten, wurden hierbei nicht berücksichtigt.

Die Zeit, die benötigt wird, die Anlage nach einem Ausfall oder vorbeugend wieder in einen neuwertigen Zustand zu versetzen, wird oftmals anwachsen mit der Länge der vorherigen Laufzeit des Systems. Längere Laufzeit machen z.B. eine längere Reinigung der Anlage erforderlich, oder Schrauben sind schlechter zu lösen, da sie korrodiert sind.

Daher nehmen wir an, daß die Erneuerungszeiten abhängen von der vorherigen Laufzeit. Da die Instandhaltungszeiten aber nicht nur von der Länge der vorherigen Laufzeit abhängen, werden die Zeiten in einen laufzeitabhängigen und einen laufzeitunabhängigen Teil aufgespalten.

Außerdem unterscheiden wir zwischen der Zeit, die für eine ausfallbedingte Instandsetzung und für eine vorbeugende Instandhaltung benötigt wird, da auf Grund der besseren Planung bei der vorbeugenden Maßnahme keine Verzögerungen eintreten, bis z.B. das Instandhaltungsmaterial und die Instandhaltungsmannschaft zur Verfügung stehen. Diese Verzögerungen können vor allem dann zu größeren Zeitverlusten führen, wenn die Instandhaltung durch fremde Firmen, z.B. die Herstellerfirma der Anlage, ausgeführt werden muß, wie es etwa bei Rechenanlagen üblich ist.

Damit lassen sich die Erneuerungszeiten des n-ten Systems darstellen durch

(4.3.3) $\hat{T}_{f,n}(X_n) = T_{f,n} + q_f(X_n)$

(4.3.4) $\hat{T}_{p,n}(T) = T_{p,n} + q_p(T)$ [1)]

1) vgl. Wolff, Subramanian[183],S.16

$(T_{f,n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschreiben den laufzeitunabhängigen Teil der Erneuerungszeit, je nachdem ob eine ausfallbedingte oder eine vorbeugende Instandhaltungsmaßnahme durchgeführt wird. [1] $(T_{f,n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ seien stochastische Folgen, die einen Erneuerungsprozeß bilden mit endlichem Erwartungswert $T_f = E(T_{f,n})$ und $T_p := E(T_{p,n})$ $(n\in\mathbb{N})$.

Die Funktionen q_f und q_p beschreiben die Abhängigkeit von der vorherigen Laufzeit und seien monoton steigende Funktionen mit $q_f(0)=q_p(0)=0$, $q_f \in C_0(\mathbb{R}^+)$, $q_p \in C_1(\mathbb{R}^+)$,

$E(q_f(X_n)) < \infty$ und $E(q_p(X_n)) < \infty$.

Bei der Zeit, die für die Justierung der Elemente aus G3 benötigt wird, unterscheiden wir zwei Fälle:

(i) Die Justierung und die anderen Instandhaltungsmaßnahmen werden nacheinander ausgeführt.

(ii) Die Justierung geschieht parallel zu den übrigen Instandhaltungsmaßnahmen, die an der Anlage durchgeführt werden, und benötigt keine zusätzliche Zeit.

Auch die Zeit für eine Justierung an dem n-ten System kann von der vorherigen Laufzeit abhängig sein, so daß wir sie auch durch einen laufzeitunabhängigen stochastischen Term $T_{r,n}$ und eine monoton steigende Funktion q_r in Abhängigkeit von der vorangehenden Laufzeit des gesamten Systems beschreiben.

Die Zufallsfolge $(T_{r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ bilde einen Erneuerungsprozeß mit endlichem Erwartungswert $T_r := E(T_{r,n})$, $(n\in\mathbb{N})$; für q_r gelte $q_r(0)=0$, $q_r \in C_1(\mathbb{R}^+)$ und $E(q_r(X_n)) < \infty$.
Die Justierungszeit für das n-te System beträgt dann:

$$(4.3.5) \qquad \hat{T}_{r,n}(T) := T_{r,n} + q_r(LZ_n(T)).$$

---

1) Wir folgen hier der allgem. üblichen Kennzeichnung der Größen durch f für ausfallbedingte (failure) und p für vorbeugende(preventive) Maßnahmen.

Wird keine zusätzliche Justierungszeit benötigt(Fall(ii)), so setzen wir $T_{r,n} = 0$.

Die Zeit, die von Inbetriebnahme einer Anlage in neuwertigem Zustand bis zur Inbetriebnahme der nächsten Anlage bzw. der überholten, aber neuwertigen Anlage vergeht, bezeichnet man als Erneuerungszyklus. Er setzt sich zusammen aus der Laufzeit des Systems und der Stillstandszeit.

Berücksichtigen wir nun die Stillstandszeiten für Instandhaltungsmaßnahmen, so ergibt sich für den n-ten Erneuerungszyklus $Z_n(T)$:

$$Z_n(T) := LZ_n(T) + SZ_n(T),$$

wobei $SZ_n(T)$ die gesamte Stillstandszeit ist, die sich aus minimaler Reparatur, Justierung und Instandhaltung ergibt, d.h.

$$SZ_n(T) := N_M(LZ_n(T)) \cdot T_M + I_T(X_n) \cdot \hat{T}_{f,n}(X_n) + \bar{I}_T(X_n) \cdot \hat{T}_{p,n}(T) + \hat{T}_{r,n}(T)$$

mit
$$I_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und
$$\bar{I}_T(x) = 1 - I_T(x)$$

Die Zykluslänge $(Z_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ bildet einen alternierenden Erneuerungsprozeß, denn die Stillstandszeiten $(SZ_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ bilden ebenfalls einen Erneuerungsprozeß.

Die drei Gruppen von instandhaltungsbedürftigen Elementen verursachen auch gruppenspezifische Kosten.

Betragen die durchschnittlichen Kosten einer minimalen Reparatur C_M, so erhält man während eines Zyklus an Kosten für minimale Reparaturen.

$$N_M(LZ_n(T)) \cdot C_M$$

Während der Laufzeit des Systems entstehen weitere Kosten, die sich aus den Leistungsveränderungen der Elemente aus G1 ergeben auf Grund von Störungsursachen, z.B. Qualitätsminderung, steigender Faktorverzehr etc. [1] Die hieraus resultierenden Kosten erfassen wir in einer monoton steigenden Funktion g_1 mit $g_1(0) = 0$, $g_1 \in C_0(\mathbb{R}^+)$, $E(g_1(X_n)) < \infty$, **welche die zum Zeitpunkt t entstehenden Kosten darstellt.**

Die während des n-ten Zyklus durch die Elemente der Gruppe 1 verursachten Kosten betragen somit:

$$K_n^1(T) := N_M(LZ_n(T)) \cdot C_M + \int_0^{LZ_n(T)} g_1(t)dt$$

Genau wie in G1 verändern auch die Elemente in G2 während der Laufzeit ihre Eigenschaften. Die dadurch entstehenden Kosten sollen durch die monoton wachsende Funktion g_2 beschrieben werden mit $g_2(0)=0$, $g_2 \in C_0(\mathbb{R}^+)$, $E(g_2(X_n)) < \infty$.

Außerdem fallen zum Ende der Laufzeit weitere Instandhaltungskosten an sowohl für Ersatz bzw. Generalüberholung wie auch für die Justierung.

Ebenso wie bei den benötigten Instandhaltungszeiten muß auch hier zwischen den Kosten einer ausfallbedingten und einer vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahme **differenziert** werden, da sie in unterschiedlicher Höhe anfallen.

Diese Kosten werden als stochastische Variable aufgefaßt, die man entsprechend den Instandhaltungszeiten in einen laufzeitunabhängigen und einen laufzeitabhängigen Teil aufspalten kann: denn längere Laufzeiten verursachen z.B. geringere Wiederverkaufserlöse, erhöhte Abbruchkosten etc.. $(\tilde{C}_{f,n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{C}_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ seien Erneuerungsprozesse mit endlichem Erwartungswert, welche die laufzeitunabhängigen Kosten beschreiben.

Die laufzeitabhängigen Kosten werden durch monotone Funktionen g_f und g_p beschrieben mit $\tilde{g}_f(0)=\tilde{g}_p(0)=0, \tilde{g}_f \in C_0(\mathbb{R}^+)$ und $\tilde{g}_p \in C_1(\mathbb{R}^+)$, $E(\tilde{g}_f(X_n)) < \infty$, $E(\tilde{g}_p(X_n)) < \infty$.

---

1) vgl. Abschnitt 2.3

Bei den Instandhaltungskosten muß man außerdem noch berücksichtigen, daß **die Länge der Stillstandszeit die Höhe der zuzurechnenden Personalkosten und des Gewinnentgangs beeinflußt.**
Wir nehmen diese Kosten als proportional zur Stillstandszeit an und erhalten dann für die Stillstandskosten

$$\tilde{C}_{f,n} + \tilde{g}_f(X_n) + a_f \cdot (T_{f,n} + q_f(X_n))$$

$$\tilde{C}_{p,n} + \tilde{g}_p(T) + a_p \cdot (T_{p,n} + q_p(T))$$

wobei a_f, $a_p \geq 0$ **endliche Proportionalitätsfaktoren sind.**
Wir fassen bei den Kosten folgende Terme zusammen

(4.3.6) $$C_{\cdot,n} := \tilde{C}_{\cdot,n} + a_\cdot \cdot T_{\cdot,n}$$ [1)]

(4.3.7) $$g_\cdot(x) := \tilde{g}_\cdot(x) + a_\cdot \cdot q_\cdot(x)$$

Dann bilden $(C_{f,n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(C_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls Erneuerungsprozesse mit endlichem Erwartungswert:

$$C_f := E(C_{f,n}) = E(\tilde{C}_{f,n}) + a_f \cdot T_f$$

$$C_p := E(C_{p,n}) = E(\tilde{C}_{p,n}) + a_p \cdot T_p \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

und g_f und g_p sind monoton steigende Funktionen mit $g_f(0) = g_p(0) = 0, g_f \in C_0(\mathbb{R}^+), g_p \in C_1(\mathbb{R}^+)$.

Die Instandhaltungskosten sind dann die Summe aus einem laufzeitunabhängigen und einem laufzeitabhängigen Teil:

$$\hat{C}_{f,n}(X_n) := C_{f,n} + g_f(X_n)$$

$$\hat{C}_{p,n}(T) := C_{p,n} + g_p(T) \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

so daß wir die Abhängigkeit von der Stillstandszeit nicht

in einem eigenen Term berücksichtigen müssen!

Die Elemente aus Gruppe 2 verursachen somit während des n-ten Zyklus Kosten in Höhe von

$$K_n^2(T) := \int_0^{LZ_n(T)} g_2(t)\,dt + I_T(X_n) \cdot \hat{C}_{f,n}(X_n) + \bar{I}_T(X_n) \cdot \hat{C}_{p,n}(T)$$

Bei den Elementen aus G3 ist zu beachten, daß die Genauigkeit der Justierungen nicht immer gleich gut ist. Hieraus resultieren Schwankungen in der Höhe der entstehenden Produktionskosten. Diese Unterschiede in der Justierungsgenauigkeit erfassen wir in einer stochastischen Variablen V_n, welche die Anfangskosten bei Inbetriebnahme nach einer Justierung enthält. In diesen Kosten V_n können wir aber nicht nur die Justierungsgenauigkeit erfassen, sondern auch die unterschiedliche Qualität der Teile, aus denen die Anlage besteht. Diese Qualitätsdifferenzen können nämlich auch bei neuwertigen Systemen zu unterschiedlichen Anfangskosten führen, da z.B. die Leistungsfähigkeit von gleichen Motoren schwanken kann innerhalb gewisser Toleranzen, die Festigkeit der Materialien nicht konstant ist etc..

Während der weiteren Laufzeit verschlechtert sich die Justierung (bzw. Qualität), und es ergeben sich somit steigende Kosten, die wir wieder mit einer monoton steigenden Funktion g_3 erfassen.

Die Elemente aus G3 verursachen somit nach einer Laufzeit des Produktionsprozesses von t Zeiteinheiten die Kosten:

$$V_n + g_3(t)$$

Die Zufallsfolge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilde einen Erneuerungsprozeß mit endlichem Erwartungswert $V := E(V_n)$, und für die Funktion g_3 gelte $g_3(0) = 0$, $g_3 \in C_1(\mathbb{R}^+)$, $E(g_3(X_n)) < \infty$.

Zusätzlich entstehen noch Kosten für die Justierung der Elemente. Diese Kosten spalten wir wieder in einen laufzeitabhängigen und laufzeitunabhängigen Teil auf. Die Abhängigkeit der Kosten von der Länge der Justierungszeit beziehen wir in gleicher Weise wie bei den Kosten der Gruppe 2 mit ein und erhalten:

$$\hat{C}_{r,n}(T) := C_{r,n} + g_r(LZ_n(T)).$$

$(C_{r,n})_{n \in \mathbb{N}}$ bilde einen Erneuerungsprozeß mit endlichem Erwartungswert $C_r := E(C_{r,n})$ $(n \in \mathbb{N})$ und g_r sei eine monoton steigende Funktion mit $g_r(0)=0$, $g_r \in C_1(\mathbb{R}^+), E(g_r(X_n)) < \infty$.

In der Gruppe 3 belaufen sich somit die Kosten des n-ten Zyklus auf

$$K_n^3(T) := \int_0^{LZ_n(T)} [V_n + g_3(t)]\, dt + \hat{C}_{r,n}(t).$$

Die Kosten des gesamten Instandhaltungssystems ergeben sich nun aus den Kosten der drei Teilsysteme:

$$K_n(T) := K_n^1(T) + K_n^2(T) + K_n^3(T)$$

Für die weiteren Untersuchungen wollen wir jedoch diese Kosten noch unter einem anderen Gesichtspunkt zusammenfassen und zwar nach den Kosten, die während der Laufzeit entstehen, und den Instandhaltungskosten.

Die reinen Laufzeitkosten betragen:

$$LK_n(T) := \int_0^{LZ_n(T)} [V_n + g(t)]\, dt \qquad (4.3.8)$$

mit $g(t) := g_1(t) + g_2(t) + g_3(t)$.

Die gesamten Kosten für die Instandhaltungsmaßnahmen be - laufen sich innerhalb eines Zyklus auf:

$$(4.3.9) \quad SK_n(T) := N_M(LZ_n(T))\, C_M + I_T(X_n)\, \hat{C}_{f,n}(X_n) + \bar{I}_T(X_n)\, \hat{C}_{p,n}(T) + \hat{C}_{r,n}(T)$$

Somit haben wir nun alle Größen, die das Instandhaltungs- system beeinflussen beschrieben. Wir werden im folgenden die Monotonieeigenschaften der Funktionen und deren Differen - zierbarkeit, wie wir sie in diesem Abschnitt angegeben haben, voraussetzen, ohne jedesmal erneut darauf hinzuweisen.

4.3.1 MAXIMIERUNG DES ZU ERWARTENDEN GEWINNS PRO BETRIEBSZEITEINHEIT

Wie bei der Untersuchung der Zielfunktionen gezeigt [1], ist dieses Problem äquivalent zur Kostenminimierung pro Betriebszeiteinheit, wenn man den Gewinnentgang, der durch die notwendigen Instandhaltungsmaßnahmen entsteht, den Stillstandsaufwendungen als Opportunitätskosten hinzurechnet. Wir werden hier jedoch das Gewinnmaximierungsproblem untersuchen.

G bezeichne wieder den Bruttogewinn pro Laufzeiteinheit. [1] Der bis zu einem Zeitpunkt t während der Betriebszeit entstehende Gewinn, d.h. Bruttogewinn abzüglich der Laufzeit- und Instandhaltungskosten, setzt sich zusammen aus:

(1) Dem Gewinn aller Erneuerungszyklen bis zum letzten Regenerationspunkt vor t. Dieser Regenerationspunkt ist gegeben durch $\$_{N(t)}$, wobei N(t) die Zahl der Zyklen bis zum Zeitpunkt t angibt. Der bis $\$_{N(t)}$ entstandene Gewinn beträgt

$$\sum_{n=1}^{N(t)} G_n(T)$$

wobei $G_n(T)$ der Gewinn des n-ten Zyklus ist, d.h.

$$G_n(T) := G \cdot LZ_n(T) - K_n(T).$$

(2) In dem zum Zeitpunkt t laufenden Zyklus N(t) + 1 ist die Zeit $(t - \$_{N(t)})$ verstrichen. Wird zu dem Zeitpunkt t kein vollständiger Ersatz der Anlage durchgeführt, sondern befindet sich das System in Betrieb oder wird nur

---

1) vgl. S.23f

eine minimale Reparatur durchgeführt, so beträgt die reine Laufzeit des N(t) + 1 Systems t_1 Zeiteinheiten ($t_1 \leqq t$), und es sind $N_M(t_1)$ minimale Reparaturen notwendig gewesen.

Dadurch ist in diesem Zyklus ein Gewinn entstanden in Höhe von:

$$L(t_1) := G \cdot t_1 - \int_0^{t_1} \left[V_n + g(x) \right] dx + N_M(t_1) \cdot C_M$$

Hierbei sind die Kosten der minimalen Reparatur jeweils dem Beginn der Instandhaltungsmaßnahmen zugerechnet.

(3) Wird zum Zeitpunkt t die Anlage überholt, so müssen wir noch die entsprechenden Instandsetzungskosten hinzurechnen, je nachdem, ob eine vorbeugende oder ausfallbedingte Instandhaltungsmaßnahme notwendig ist. Beziehen wir auch hier wieder die Kosten auf den Beginn der Instandhaltungsaktion, so ergibt sich ein Gewinn von

$$G_{N(t)+1} = G \cdot LZ_{N(t)+1} - K_{N(t)+1}$$

Der gesamte Gewinn des Systems bis zum Zeitpunkt t beläuft sich damit auf:

$$C_t(T) := \sum_{n=1}^{N(t)} G_n(T) + I_t(\$_{N(t)+1} + X_{N(t)+1}) \cdot G_{N(t)+1}$$

$$+ \bar{I}_t(\$_{N(t)+1} + X_{N(t)+1}) \cdot L(t_1)$$

Hieraus folgt nun, daß der Gewinn $(C_t(T))_{t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$ einen kumulativen Prozeß bildet, der durch den Erneuerungsprozeß der Zyklen $(Z_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ gesteuert wird.

Denn es gilt:

$$G_n(T) = C_{\$_n}(T) - C_{\$_{n-1}}(T) \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit $S_o = C_o = o$ und $C_t(T)$ ist von beschränkter Variation mit Wahrscheinlichkeit 1 in jedem endlichen t Intervall. Die Bedingung (3) [1] ist ebenfalls erfüllt.

Um den Satz von Smith anwenden zu können, berechnen wir jetzt die Erwartungswerte der Zyklenlänge und des Gewinns, der während eines Zyklus entsteht.

Der Erwartungswert der Zyklenlänge ergibt sich aus den Erwartungswerten der Lauf - und Stillstandszeiten.

$$E(LZ_n(T)) = \int_0^T x \, dF(x) + T \cdot \bar{F}(T) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Hieraus folgt mittels partieller Integration:

$$(4.3.10) \qquad E(LZ_n(T)) = \int_0^T \bar{F}(t) \, dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

Die zu erwartende Stillstandszeit beträgt:

$$(4.3.11) \quad E(SZ_n(T)) = E(N_M(LZ_n(T))) \cdot T_M + (T_f - T_p) \cdot F(T) + \int_0^T \hat{q}_r(t) dF(t) + \hat{q}_f(T) \cdot \bar{F}(T) + T_p + T_r$$

mit $\hat{q}_{\cdot}(t) = q_{\cdot}(t) + q_r(t)$

---

1) vgl. Definition 3.4

Es bleibt nun noch der Erwartungswert der Anzahl der minimalen Reparaturen zu berechnen.

Hierzu nehmen wir zunächst an, daß wir nur Elemente der Gruppe 1 vorliegen haben. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der minimalen Reparaturen bis zum Zeitpunkt t genau n beträgt, sei $P_n(t) := P\{N_M(t) = n\}$

Die Wahrscheinlichkeit, daß bis zum Zeitpunkt (t+h) genau (n+1) Elemente ausgefallen sind, beträgt dann

$$(4.3.12)\quad P_{n+1}(t+h) = P_n(t)\cdot F_t(h) + P_{n+1}(t)(1-F_t(h)).$$

$F_t(h)$ ist dabei die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein Element das Alter t erreicht und bis zum Alter (t+h) ausgefallen ist, d.h. ist F_1 die absolut stetige Ausfallverteilung der Gruppe 1 so gilt:

$$F_t(h) = \frac{F_1(t+h) - F_1(t)}{\overline{F}_1(t)} \quad 1)$$

$P_n(t)\cdot F_t(h)$ ist somit die Wahrscheinlichkeit, daß bis zum Zeitpunkt t genau n minimale Reparaturen angefallen sind und bis (t+h) eine weitere durchgeführt werden muß.

$P_{n+1}(t)\cdot(1-F_t(h))$ gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, daß bis zum Zeitpunkt t genau (n+1) Ausfälle mit minimaler Reparatur beseitigt werden müssen und dann kein Ausfall mehr geschieht.

Formen wir die Gleichung (4.3.12) um zu

$$\frac{P_{n+1}(t+h)-P_{n+1}(t)}{h} = (P_n(t)-P_{n+1}(t))\cdot\frac{F_t(h)}{h},$$

1) Diese Größe $F_t(h)$ bezeichnet man auch als Intervallausfallrate; vgl. Wolff [182], S. 46.

so erhalten wir durch den Grenzübergang $h \to o$ das Differentialgleichungssystem:

$$P_{n+1}(t) = (P_n(t)-P_{n+1}(t))\cdot\phi_M(t) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Denn $F_t(h)/h$ konvergiert gegen die Ausfallrate ϕ_M, da

$\frac{F_1(t+h)-F_1(t)}{h}$ gegen die Dichtefunktion f_1

konvergiert für $h \to o$. [1)]

Eine Lösung für dieses Differentialgleichungssystem ist gegeben durch

$$P_n(t) = (Q(t)^n \; e^{-Q(t)})/n! \;,$$

mit $Q(t) := \int_o^t \phi_M(x)dx$. [2)]

Unter den Randbedingungen $\sum_{n=o}^{\infty} P_n(t)=1$, $P_n(t) \geq o$ ist die Lösung eindeutig bestimmend, da mit $\phi_M \geq o$ und ϕ_M stetig die Regularitätsbedingungen erfüllt sind. [2)]

Um jedoch den Erwartungswert der Zahl der minimalen Reparaturen während eines Zyklus zu berechnen, müssen wir die Zahl der bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen minimalen Reparaturen mit der Wahrscheinlichkeit des Erreichens dieser Laufzeitlänge gewichten.

Damit erhalten wir dann:

$$E(N_M(LZ_n(T))) = \int_0^T \left(\int_0^t \phi_M(x)dx \right) dF(t) + \bar{F}(T)\cdot\int_0^T \phi_M(x)dx$$

---

1) vgl. Wolff [182], S. 46

2) vgl. Barlow, Hunter [8], S. 96

Hieraus erhalten wir mittels partieller Integration:

$$(4.3.13) \qquad E(N_M(LZ_n(T))) = \int_0^T \phi_M(t)\ \bar{F}(t)dt$$

Somit ergibt sich aus unseren Voraussetzungen und (4.3.10) (4.3.11)und (4.3.13), daß der Erwartungswert der Zyklenlänge endlich ist.

Der Erwartungswert der Laufzeitkosten ergibt nach partieller Integration

$$E(LK_n(T)) = \int_0^T [\,V + g(t)]\ \bar{F}(t)dt \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Für den Erwartungswert der Stillstandskosten erhalten wir unter Benutzung des Ergebnisses (4.3.4):

$$E(SK_n(T)) = C_M \cdot \int_0^T \phi_M(t)\cdot\bar{F}(t)dt + (C_f - C_p)\cdot F(T) + \int_0^T \hat{g}_f(t)dF(t)$$

$$+ \hat{g}_p(T)\cdot\bar{F}(T) + C_p + C_r$$

mit $\hat{g}_\cdot(t) := g_\cdot(t) + g_r(t)$.

Da $\tilde{\kappa}$ beschränkt ist durch $G, E(LZ_n(T)) + E(K_n(T)) < \infty$, sind die Voraussetzungen des Satzes von Smith erfüllt, und wir erhalten für die Zielfunktion der Maximierung des zu erwartenden Gewinns pro Zeiteinheit bei einem unendlichen Planungshori - zont:

$$(4.3.14) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{E(C_t(T))}{t} = \frac{E(G_n(T))}{E(Z_n(T))} = : \xi_1(T) \longrightarrow \max!\,(n\in\mathbb{N})$$

Man kann nun zeigen, daß die optimale, deterministische Strategie T durch keine stochastische Strategie T, deren Verteilung unabhängig von den übrigen stochastischen Variablen ist, verbessert werden kann, wenn die Zielfunktion stetig ist [1].

Als notwendige Bedingung für die Existenz einer endlichen optimalen Strategie T^* erhält man durch Differentiation von $\xi_1(T)$ nach T, daß im Optimum die prozentuale Veränderung des zu erwartenden Gewinns gleich der prozentualen Veränderung der zu erwartenden Laufzeit sein muß:

$$(4.3.15) \qquad \frac{\frac{dE(G_n(T))}{dT}}{E(G_n(T))} = \frac{\frac{dE(Z_n(T))}{dT}}{E(Z_n(T))}$$

Dies heißt, daß die Elastizität des zu erwartenden Gewinns bezüglich der zu erwartenden Zyklenlänge im Optimum gleich eins ist.

Um jedoch sicherzustellen, daß auch ein T existiert, daß die Bedingung (4.3.15)erfüllt, untersuchen wir den Zähler aus (4.3.14).Die notwendige Bedingung für ein Optimum des Zählers lautet:

$$(4.3.16) \quad G\cdot\overline{F}(T) = (V+g(T))\cdot\overline{F}(T)+C_M\cdot\phi_M(T)\cdot\overline{F}(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot f(T) + \hat{g}_p'(T)\cdot\overline{F}(T),$$

$$\text{mit } \hat{C}_\cdot(T) = C_\cdot + g_\cdot(T)$$

Hierbei ist $G\cdot\overline{F}(T)$ der Grenzgewinn bzg.T; $g(T)\cdot\overline{F}(T)$ sind die Grenzkosten der Laufzeit bzg.T,$C_M\cdot\phi_M(T)\cdot\overline{F}(T)$ die Grenzkosten der minimalen Reparatur , und die restlichen Terme von(4.3.16)

---

1) vgl. Barlow-Proshan[9] , S. 68f
Der dort gegebene Beweis läßt sich direkt auf diesen Fall übertragen. Die Differenzierbarkeit der Zielfunktion muß nicht gegeben sein. Dies gilt entsprechend für die weiteren Zielfunktionen!

stellen die Grenzkosten während der Stillstandszeit bzg.T dar, wobei alle Größen mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichtet sind. Durch Division beider Seiten von (4.3.16)durch $\overline{F}(T)$ erhalten wir: [1]

$$(4.3.17) \qquad G = V+g(T)+C_M\cdot\phi_M(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot\phi(T)+\hat{g}_p'(T)$$

Wir wollen nun Bedingungen angeben, wann diese Gleichung eine Lösung besitzt, die das Optimum liefert.

Hierzu unterscheiden wir zwei Klassen von Ausfallraten:

(K1) Hierin sind alle Ausfallraten erfaßt, die monoton steigend gegen $+\infty$ sind. Hierunter fallen z.B. die Ausfallraten der Weibullverteilung für $\alpha > 1$ und der abgeschnittenen Normalverteilung für $\alpha > 0$. [2]

(K2) Die Ausfallrate ist nach oben beschränkt. Diese Klasse umfaßt z.B. die Ausfallrate der Gammaverteilung ($\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$) und der logarithmischen Normalverteilung. Die Gammaverteilung besitzt für $\alpha > 1, \lambda > 0$ eine ansteigende Ausfallrate, die jedoch durch λ nach oben beschränkt ist.

Der Spezialfall der Exponentialverteilung $\alpha = 1$, $\lambda > 0$ besitzt eine konstante Ausfallrate , d.h. die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im nächsten Augenblick ist unabhängig vom Alter des Elementes. Die Exponentialverteilung ist die einzige Ausfallverteilung mit konstanter Ausfallrate.
Die Ausfallrate der logarithmischen Normalverteilung steigt zunächst bis zu einem Maximum und fällt anschließend. [3]

---

1) Hierbei sei $\overline{F}(T) > 0$; ist die Bedingungsgleichung nur für $\overline{F}(T) = 0$ erfüllt, so ist die Basisstrategie,d.h. warten bis zum Ausfall eines Elementes aus G2,optimal.

2) vgl. Wolff[182],S.129ff, Jorgenson-Mc Call-Radner[73],S.138ff Barlow-Proshan[10], S.13ff, Kistner[78],S.30ff, Cox[21],S.15-24, Schelo[147],S.63ff

3) vgl. Jorgenson,McCall,Radner[73], S. 140f

Mit dieser Einteilung können wir nun folgende Bedingungen angeben:

Lemma 4.3.1: Für die Zielfunktion

$$E(G_n(T)) \longrightarrow \max !$$

existiert eine endliche, optimale Strategie T_1^*, wenn gilt: [1)]

(4.3.1.1) $0 \leqq C_p < C_f$, $0 \leqq g_p(t) \leqq g_f(t)$ $(t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$
$C_M > 0$

(4.3.1.2) ϕ und/oder ϕ_M ist aus (K1)
oder

(4.3.1.2)' ϕ und ϕ_M sind aus (K2) und $\overline{F}(t) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}^+$; ab hinreichend großem $t_0 \in \mathbb{R}^+$ gilt $(V+g(t)) > G, (t \geqq t_0)$.

Beweis: Die Gleichung (4.3.8) hat unter diesen Voraussetzungen eine Lösung für ein Maximum. ▲

Die Bedingung (4.3.1.1) beinhaltet, daß die Kosten einer ausfallbedingten Erneuerung größer sind als die einer vorbeugenden. Dies wird i.a. durch die bessere Planung und die damit verbundene Stillstandszeitverkürzung immer erfüllt sein.

Sind die Kosten $C_M=0$, d.h. entstehen keine minimalen Reparaturen oder sind die Kosten so gering, daß sich deren Erfassung nicht lohnt, so brauchen wir die minimalen Reparaturen im weiteren Kalkül nicht mehr berücksichtigen, und wir setzen $\phi_M(t)=0$ $(t \in \mathbb{R}^+)$.

Die Funktion g erfaßt die abnutzungsbedingten Kosten, die

---

1) Die notwendigen Monotonie-und Differenzierbarkeitseigenschaften haben wir im letzten Abschnitt generell vorausgesetzt.

i.a. während der Produktionszeit ansteigen. Die Bedingung (4.3.1.2)' sagt dabei aus, daß die entstehenden Kosten nach entsprechend langer Nutzungszeit den Gewinn übersteigen, so daß dann auf jeden Fall eine vorbeugende Instandhaltungsmaßnahme erforderlich wird.

Es ist jedoch anzumerken, daß das Maximum auch für T=0 angenommen werden kann. Dies würde bedeuten, daß nur Verluste entstehen und die Verluste bei laufender Erneuerung ohne zwischenzeitliche Laufzeiten minimal werden. Somit ist die Anlage unrentabel und muß stillgelegt werden.

Die Zielfunktion kann aber auch bei positivem T_1^* und somit positiver Laufzeit einen negativen Wert ergeben, so daß auch dann die Anlage nur Verluste erbringt; jedoch für T_1^* werden die Verluste minimiert. Dies führt aber ebenso zu einer völligen Stillegung dieser Anlage, da Verluste nur innerhalb kurzer Zeit verkraftet werden können, nicht jedoch über einen längeren (hier: unendlichen) Planungshorizont.

Lemma 4.3.1 ermöglicht es uns, ebenfalls hinreichende Bedingungen für die Existenz einer optimalen Lösung der Zielfunktion $\zeta_1(T)$ anzugeben.

Satz 4.3.2: Sind die Bedingungen (4.3.1.1) bis(4.3.1.2)' erfüllt, und ist der erzielte Gewinn $E(G_n(T_1^*))$ positiv,d.h. es entsteht kein Verlust,und gilt außerdem:

(4.3.2.1) $o \leqq T_p \leqq T_f$, $\leqq q_p(t) \leqq q_f(t)$ $(t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$

$T_M \geqq o$,

so existiert zur Zielfunktion $\zeta_1(T)$ eine endliche, optimale Strategie T^*.

Anmerkung: Die Bedingung (4.3.2.1) drückt aus, daß für eine ausfallbedingte Instandsetzung eine längere Zeit benötigt wird als bei einer vorbeugenden Maßnahme; dies wurde auch in der Bedingung (4.3.1.1) bei den Kosten berücksichtigt.

Beweis: Für die Ableitung der Zyklenlänge nach der Zeit gilt:

$$\overline{F}(T)+T_M\,\phi_M(T)\overline{F}(T)+(\hat{T}_f(T)-\hat{T}_p(T))\cdot f(T)+\hat{q}_p'(T)\;\overline{F}(T),$$

mit $\hat{T}_\cdot(T) = T_\cdot + q(T)$

Aufgrund der Bedingung (4.3.2.1) ist diese Ableitung nicht negativ, so daß die zu erwartende Zyklenlänge eine in T monoton steigende Funktion ist. Da nun der Zähler ein endliches, positives Maximum hat und der Nenner monoton steigt, besitzt auch $\xi_1(T)$ ein endliches, positives Maximum T^*. ▲

Die Bedingungsgleichung (4.3.15)kann unter den Voraussetzungen des Satzes 4.3.2 jedoch mehrere Lösungen besitzen. Aus dem Beweis zu Satz 4.3.2 folgt aber die Beschränktheit der Lösungsmenge:

Korollar 4.3.3: Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.3.2 ist die optimale Lösung T^* der Zielfunktion $\xi_1(T)$ durch die optimale Strategie T_1^* nach oben beschränkt.

Dieses Ergebnis bedeutet, daß die optimalen vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahmen bei der Maximierung des Gewinns pro Betriebszeiteinheit nicht später vorgenommen werden als bei der Gewinnmaximierung für nur eine Periode. Dies steht im Einklang mit dem aus der Investitionstheorie bekanntem Resultat, daß die optimale wirtschaftliche Lebensdauer bei einer unendlichen Investitionskette kürzer ist als bei einer einmaligen Investition. [1)]

Dieses Korollar ermöglicht es, den Bereich stark einzugrenzen, in dem man bei numerischen Suchverfahren nach optimalen Lösungen suchen muß. Denn die Bedingungsgleichung (4.3.15)ist i.a. eine (transzendente) Gleichung, die man nicht nach T auflösen kann. Daher wird man, um Lösungen zu finden, bekannte Algorithmen verwenden, z.B. Newton-Verfahren, Verfahren mit konjugierten Gradienten oder mit linearen Suchtechniken.[2)]

1) vgl. Schneider [151] , S. 75 ff

2) vgl. Fletscher,R., Powell M.J.D.[37],S. 163-168; Fletscher,R.-Reeves C.M.[38],S. 149-154;zitiert nach IBM Application Programm H 20-0205-3(1968).

Betrachtet man den einfachen Fall

(4.3.18) $V = C_M = T_M = C_r = T_r = 0$

$g(t)=g_f(t)=g_p(t)=g_r(t)=q_f(t)=q_p(t)=q_r(t)=0$ [1)]

$(t \in \mathbb{R}^+)$,

und vergleicht ihn mit dem hier diskutierten Modell, so ergibt sich, daß der Lösungsbereich für die optimale Strategie T^*, der durch das Optimum T_1^* des Zählers von (4.3.14) begrenzt ist, von den Größen in (4.3.18) stark beeinflußt wird. Denn jeder Term aus (4.3.18) liefert, falls er positiv ist, unter den Bedingungen von Lemma 4.3.1 einen positiven Beitrag zur rechten Seite der Bedingungsgleichung (4.3.17). Dadurch wird die optimale Lösung T_1^* gegenüber dem einfachen Fall kleiner und somit der Lösungsbereich weiter eingeschränkt.

Existiert ein endliches T^*, so daß die Bedingungsgleichung (4.3.15) erfüllt ist, oder ist die Basisstrategie $T^* \to \infty$ optimal, so nimmt die Zielfunktion im Optimum den Wert an:

$$\xi_1(T^*)=\begin{cases} \dfrac{G-\left[V+g(T^*)+C_M\cdot\phi_M(T^*)+(\hat{C}_f(T^*)-\hat{C}_p(T^*))\cdot\phi(T^*)+\hat{g}_p'(T^*)\right]}{1+T_M\cdot\phi_M(T^*)+(\hat{T}_f(T^*)-\hat{T}_p(T^*))\cdot\phi(T^*)+\hat{q}_p'(T^*)} & \text{für } 0<T^*<\infty \\ \dfrac{G\mu-\left[\int_0^\infty[V+g(t)]\cdot\bar{F}(t)dt+C_M\cdot\int_0^\infty\phi_M(t)\bar{F}(t)dt+C_f+C_r+\int_0^\infty g_f(t)dF(t)\right]}{\mu+T_M\cdot\int_0^\infty\phi_M(t)\cdot\bar{F}(t)dt+T_f+T_r+\int_0^\infty q_f(t)dF(t)} & \text{für } T^*\to\infty \end{cases}$$

Aus dem elementaren Erneuerungstheorem folgt, daß die zu erwartende Zahl von vorbeugenden und ausfallbedingten Instand-

1) Dies entspricht dem in Wolff[182] S.60ff diskutierten Problem.

haltungsmaßnahmen pro Zeiteinheit unter der optimalen Strategie T^* gegeben ist durch:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{E(Z_n(T^*))}$$

Die zu erwartende Zahl der ausfallbedingten Instandsetzungen pro Zeiteinheit beträgt hierbei:

$$N_f(T^*) = \frac{F(T^*)}{E(Z_n(T^*))}$$

und die zu erwartende Zahl der vorbeugenden Instandhaltungen pro Zeiteinheit ist:

$$N_p(T^*) = \frac{\overline{F}(T^*)}{E(Z_n(T^*))} .$$

An einem Beispiel sollen nun die Auswirkungen von vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahmen untersucht werden.

Dazu nehmen wir zunächst an, daß keine minimalen Reparaturen anfallen und wir keine laufzeitabhängigen Stillstandskosten und -zeiten haben. Vielmehr seien die Instandhaltungskosten nur abhängig von der Stillstandszeit, auf welche die Länge der Laufzeit keinen Einfluß ausübt. Die Güte der Justierung sei durch eine Rechteckverteilung über dem Intervall $[0,100]$ gegeben, so daß wir für die zu erwartenden Startkosten V=50 erhalten. Die Ausfallverteilung der Elemente aus Gruppe 2 sei eine Weibullverteilung mit den Parametern $\alpha = 2$, $\lambda = 0{,}005$. Die Laufzeitkosten seien durch eine lineare Funktion $g(t)=a \cdot t$ gegeben mit a=5.

Die Stillstandskosten und -zeiten seien:

C_f	C_p	C_r	T_f	T_p	T_r
120	70	10	1.	0.5	0.1

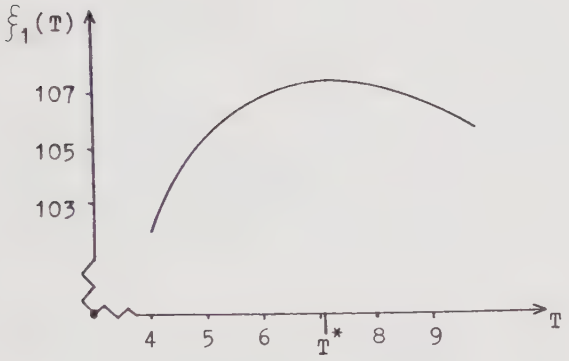


Abb. 3 Zielfunktion Gewinnmaximierung

Der optimale Zeitpunkt für eine vorbeugende Instandhaltung ist dann $T^* = 7.06$.[1)] Die zu erwartende Betriebszeit (= Zyklen -

1) Die Rechnungen wurden auf der Rechenanlage IBM 1130 des Instituts für Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften der Universität Bonn in der Programmiersprache FORTRAN IV durchgeführt. Es wurden hierbei die Optimierung mit Hilfe der Methode der konjugierten Gradienten in Verbindung mit einer linearen Suchtechnik benutzt. Diese Methode ist beschrieben in Fletcher, Reeves[38], S.149-154 und steht als Unterprogramm FMCG bzw. DFMCG des Systems /360 Scientific Subroutine Package, Version III, IBM-Application Programm H 20-0205-3 (1968) zur Verfügung.

länge) beträgt für T^* $E(Z_n(T^*)) = 7.22$. Wartet man immer bis zu einem Ausfall des Systems, so beträgt die Zyklen - länge 13.63, so daß die optimale vorbeugende Strategie die Betriebszeit um 47.03% verkürzt. Vergleicht man die Werte der Zielfunktion für $T^* = 7.06$ und $T^* \to \infty$ miteinander, so er - höht sich der Gewinn pro Zeiteinheit um 17.12% von 91.69 auf 107.39. Der kumulierte Gewinn eines Zyklus ist unter der optimalen Strategie 775.75. Die gesamte, zu erwartende Zahl von Instandhaltungsmaßnahmen pro Zeiteinheit beträgt 0.138. Wir erhalten als prozentualen Anteil der vorbeugenden Aktionen 77.95%, so daß nur etwa jede 5-te Maßnahme eine ausfallbe - dingte Instandsetzung ist.

Würde man nicht immer bis zu einem Ausfall der Anlage warten, sondern würde den Zeitpunkt T der vorbeugenden Instandhaltung an der mittleren Laufzeit unter der Basisstrategie orientieren (hier T= 12.53), so nimmt die Zielfunktion den Wert 102.69 an. Dieser Wert liegt dann aber immer noch um 4.38% unter dem Optimum.

An diesem Beispiel zeigt sich außerdem, daß sich der Gewinn bei Abweichungen $T > T^*$ weniger verändert als bei $T < T^*$. Kennt man daher die genaue Länge T^* nicht, so ist es besser, mit einem größeren T zu beginnen und sich dann an das optimale T^* heranzutasten.

4.3.2 MINIMIERUNG DER ZU ERWARTENDEN KOSTEN PRO LAUFZEITEINHEIT

In der gleichen Weise wie im letzten Abschnitt zeigt man auch hier, daß die Kosten einen kumulativen Prozeß bilden, Man erhält dann als Zielfunktion:

$$(4.3.19) \qquad \xi_2(T) := \frac{E(K_n(T))}{E(LZ_n(T))} \longrightarrow \min!$$

Man gelangt zum gleichen Optimierungsproblem, wenn man in der Zielfunktion ξ_1 den Gewinn G = 0 setzt und annimmt, daß die Instandhaltungsmaßnahmen keine Zeit beanspruchen, wohl aber Kosten verursachen. Das dort sich ergebende Maximierungsproblem ist dann äquivalent zu $\xi_2(T)$.

Eine notwendige Bedingung für eine endliche, optimale Strategie liefert die 1. Ableitung nach T:

$$(4.3.20) \qquad \frac{dE(K_n(T))}{dt} \cdot \int_0^T \bar{F}(t)dt - E(K_n(T)) \cdot \bar{F}(T) = 0$$

Dies ist jedoch gleichbedeutend damit, daß im Optimum die Elastizität der zu erwartenden Kosten bezüglich der zu erwartenden Laufzeit gleich eins ist.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen optimalen Strategie liefert uns der folgende Satz:

Satz 4.3.4: Die Voraussetzungen von Lemma 4.3.1 seien erfüllt, jedoch gelte anstatt der Bedingung (4.3.1.2)' :

(4.3.4.1) ϕ und ϕ_M ist aus (K2), und nach einer hinreichend langen Nutzungszeit werden die während der Laufzeit entstehenden Kosten größer als die gesamten

Kosten pro Zeiteinheit unter der Basisstrategie [1], d.h. ab hinreichend großem $T_0 \in \mathbb{R}^+$ ist $(V+g(T)) > \xi_2^\infty$ $(T \geq T_0)$ mit $\xi_2^\infty := \lim_{T\to\infty} \xi_2(T)$.
Außerdem sei $\bar{F}(T_0) \neq 0$.
Unter diesen Voraussetzungen existiert eine bessere Strategie als die Basisstrategie.

Beweis: Eine endliche Strategie T ist genau dann vorteilhafter als die Basisstrategie, wenn gilt:

$$\frac{E(K_n(T))}{E(LZ_n(T))} < \xi_2^\infty$$

Wir formen diese Bedingungsgleichung um zu

$$\xi_2^\infty \cdot E(LZ_n(T)) - E(K_n(T)) > 0 \tag{4.3.21}$$

Läßt man die Strategie T gegen Unendlich streben, so konvergiert die linke Seite von (4.3.21) gegen Null. Wenn wir weiter zeigen können, daß die linke Seite von (4.3.21) ab hinreichend großem T gegen Null fällt, ist (4.3.21) erfüllt, und es existiert eine vorteilhaftere Strategie als die Basisstrategie.

Wir differenzieren die linke Seite von (4.3.21) nach T und erhalten:

$$\bar{F}(T) \cdot \left[\xi_2^\infty - \left[V+g(T)+C_M \cdot \phi_M(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T)) \cdot \phi(T)+\hat{g}_p'(T) \right] \right]$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen wird diese Strategie ab hinreichend großem T negativ, so daß die Basisstrategie nicht optimal ist.▲

Dieses Ergebnis sichert uns zwar die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie, jedoch kann die Bedingungsgleichung (4.3.20) durchaus mehrere Lösungen haben. Dies würde bedeuten,

---

1) Es sei noch einmal daran erinnert, daß wir vorausgesetzt haben, daß die Zielfunktion unter der Basisstrategie immer einen endlichen Wert annimmt.

es existieren mehrere lokale Minima, unter denen man das globale bestimmen müßte. Eine Obergrenze bei der Suche nach den lokalen Minima ist die Strategie T_o aus Bedingung (4.3.4.1). Im Optimum besitzt die Zielfunktion den Wert:

$$\xi_2(T^*) = \begin{cases} V+g(T^*)+C_M\phi_M(T^*)+(\hat{C}_f(T^*)-\hat{C}_p(T^*))\phi(T^*)+\hat{g}_p'(T^*) & \text{für } 0 < T^* < \infty \\ \dfrac{\int_0^\infty [V+g(t)]\cdot \bar{F}(t)dt+C_M\cdot\int_0^\infty \phi_M(t)\bar{F}(t)dt+C_r+\int_0^\infty \hat{g}_f(t)dF(t)+C_f}{\mu} & \text{für } T^*\to\infty \end{cases}$$

Hieraus lassen sich für die endliche Strategie T^* weitere Bedingungen ableiten, die das optimale T^* als das kleinste T festlegen, welches die Bedingungsgleichung (4.3.20) erfüllt.

Korollar 4.3.5: Die Voraussetzungen des Satzes 4.3.4 seien erfüllt, und es gelte zusätzlich:

(4.3.5.1) Die Ausfallraten ϕ und ϕ_M sind monoton steigend

(4.3.5.2) Die Kostendifferenz zwischen den laufzeitabhängigen ausfallbedingten und vorbeugenden Instandhaltungen ist nicht monoton fallend.

(4.3.5.3) Die Kostenrate $\hat{g}_p'(t)$ ist monoton steigend.
Unter diesen Voraussetzungen ist das kleinste T, welches ein lokales Minimum für $\xi_2(T)$ liefert, auch die Strategie, die das absolute Minimum ergibt.

Beweis: Bei den lokalen Minima ist die Bedingungsgleichung (1.3.20) erfüllt, und somit nimmt die Zielfunktion den Wert an:

$$V+g(T)+C_M\cdot\phi_M(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot O(T)+\hat{g}_p'(T).$$

Auf Grund der Voraussetzungen des Korollars ist dieser Ausdruck monoton steigend in T, so daß beim ersten lokalen Minimum auch das absolute Minimum liegt.▲

Sowohl bei der Gewinnmaximierung wie auch bei der Kostenminimierung existieren optimale, vorbeugende Strategien, auch wenn die Ausfallraten nicht streng monoton steigend sind. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der Ersatzzeitpunkt in starkem Maße von den Kosten beeinflußt wird, die mit der Laufzeit monoton steigen, d.h. sowohl von den Laufzeitkosten als auch von den laufzeitabhängigen Stillstandskosten. Setzen wir z.B. in der Zielfunktion (4.3.19) $g(t)=g_f(t)=g_p(t)=g_r(t)=0$, $C_M=V=0$ und gehen von einer konstanten Ausfallrate aus, so lautet die Bedingungsgleichung (4.3.20) unter Berücksichtigung, daß zu der Ausfallrate die Verteilungsfunktion $F(t) = 1-e^{-\lambda t}$ gehört,

$$-(C_f-C_p)\cdot(e^{-\lambda T}-1)-((C_f-C_p)\cdot(1-e^{-\lambda T})+C_p+C_r)=0.$$

Hieraus sieht man, daß die Bedingungsgleichung für kein $T\in\mathbb{R}^+$ erfüllt ist, falls $0 \leqq C_p < C_f$, $C_r \geqq 0$. Da die Zielfunktion für $T\to 0$ gegen Unendlich strebt, ist somit bei konstanter Ausfallrate und nicht laufzeitabhängigen Kosten die Basisstrategie optimal, d.h. man wartet jeweils bis zu einem Ausfall der Anlage und führt keine vorbeugende Instandhaltungsmaßnahme durch.

Nehmen wir jedoch an, daß die laufzeitabhängigen Kosten g(t) linear wachsen, d.h. $g(t) = a\cdot t$ $(t\in\mathbb{R}^+)$, dann lautet die Bedingungsgleichung:

$$-\left(\frac{aT}{\lambda}+(C_f-C_p)\right)\cdot(e^{-\lambda T}-1)-\left(\frac{ae^{-\lambda T}}{\lambda^2}(-\lambda T-1)+\frac{a}{\lambda^2}+C_p+C_r+(C_f-C_p)(1-e^{-\lambda T})\right)\cdot e^{-\lambda T}=0$$

Nach einigen Vereinfachungen erhält man hieraus:

$$\frac{aT}{\lambda} + \frac{a(e^{-\lambda T}-1)}{\lambda^2} - C_p - C_r = 0$$

Aus dieser Bedingungsgleichung sieht man, daß der Zeitpunkt für eine optimale vorbeugende Instandhaltung unabhängig von der Höhe der ausfallbedingten Kosten ist. Dieses überraschende Ergebnis ist aber nur für die Exponentialverteilung gültig.

Für obige Gleichung existiert genau eine Lösung, und diese liefert uns die optimale Strategie T^*. Diese optimale Lösung läßt sich nicht analytisch angeben, sondern man muß sie für bestimmte Daten jeweils numerisch festlegen.

Setzen wir beispielsweise $C_f = 120$, $C_p = 70$, $C_r = 10$, $a = 5$ und $\lambda = 0.5$, so erhalten wir als optimale Strategie $T^* = 9.98$. Die Verringerung der Kosten gegenüber der Basisstrategie beträgt allerdings nur 0.09% von 75,-- auf 74.93. Dies drückt sich auch darin aus, daß der prozentuale Anteil der ausfallbedingten Instandsetzungen 99.32% beträgt. Die vorbeugende Instandhaltung bringt also in diesem Falle nur eine geringfügige Verbesserung im Vergleich zur Basisstrategie.

Um aufzuzeigen, welche Kostenvorteile die vorbeugende Instandhaltung gegenüber der Basisstrategie ergeben kann, sei noch ein Beispiel mit einer vollständigen Lösung angegeben. [1)]

Die Funktion der Laufzeitkosten sei linear:

$$g(t) = a_1 \cdot t \qquad (a_1 > 0 \;,\; t \geq 0).$$

Die Startkosten V_n seien eine beliebige zufällige Größe mit endlichem Erwartungswert.

Minimale Reparaturen berücksichtigen wir nicht, so daß $C_M = \phi_M(t) = 0$, $(t \in \mathbb{R}^+)$. Die laufzeitabhängigen Instandhal-

1) vgl. Spickenheuer [143], S. 165ff

tungskosten für die Elemente aus (G2) und (G3) seien linear, und es gelte:

$$g_f(t) = g_p(t) = a_2 \cdot t \qquad (a_2 \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

$$g_r(t) = a_3\ t \qquad (a_3 \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

Die laufzeitunabhängigen Instandhaltungskosten erfüllen die Voraussetzungen $0 \leqq C_p < C_f$ und $C_r \geqq 0$.

Die Ausfallverteilung der Elemente aus Gruppe 2 sei eine Rechteckverteilung über dem Intervall $[o,m]$, d.h.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < o \\ \frac{1}{m} \cdot t & \text{für } 0 \leqq t \leqq m \\ 1 & \text{für } t > m \end{cases}$$

Als Ausfallrate erhalten wir für die Rechteckverteilung

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < o \\ \frac{1}{m-t} & \text{für } o \leqq t < m \\ +\infty & \text{für } t \geqq m \end{cases}$$

Bei der Untersuchung der Zielfunktion können wir uns auf den Bereich $[0,m]$ für die Strategie beschränken, da der Fall $T > m$ der Basisstrategie entspricht. Für T aus dem Intervall $[0,m]$ lautet die Zielfunktion

$$\xi_2(T) = V + \frac{\frac{a}{2}T^2 - \frac{1}{3m}aT^3 + \frac{1}{m}T\,(C_f - C_p) + C_p + C_r}{T - \frac{1}{2m}T^2} \longrightarrow \min!$$

Hierbei ist a die Summe der Steigungen der linearen Kostenfunktionen:

$$a := a_1 + a_2 + a_3$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz einer besseren Strategie als die Basisstrategie lautet:

$$\frac{a}{6m^2} T^4 - \frac{2a}{3m} T^3 + \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2m^2}(C_f - C_p)\right) T^2 + \frac{1}{m}(C_f - C_p) T - (C_p + C_r) = 0$$

Um nun die optimale Strategie bestimmen zu können, machen wir folgende Annahmen:

$$a = 1,\ m = 6,\ C_f = 5,\ C_p = 2,\ C_r = 2{,}5 \quad .$$

Die Bedingungsgleichung erhält dann die Form

$$\frac{1}{216} T^4 - \frac{1}{9} T^3 + \frac{13}{24} T^2 + \frac{3}{4} T - \frac{9}{2} = 0.$$

Dies können wir umformen zu

$$\left(\frac{1}{216} T^3 - \frac{7}{12} T^2 + \frac{1}{4} T + \frac{3}{2}\right) \cdot (T-3) = 0.$$

Die Strategie $T^* = 3$ ist also eine Lösung für die Bedingungsgleichung. Man kann nun leicht zeigen, daß $T^* = 3$ das globale Minimum für die Zielfunktion in dem Intervall $[0,6]$ ist, da

$$\frac{1}{216} T^3 - \frac{7}{12} T^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$$

negativ ist für alle $T \in [0,6]$ und somit keine weitere Lösung in diesem Intervall für die Bedingungsgleichung existiert. Die zu erwartenden Kosten pro Laufzeiteinheit unter der optimalen Strategie betragen:

$$\xi_2(3) = V + 4$$

Führt man keine vorbeugenden Instandhaltungen durch, sondern wartet mit den Maßnahmen, bis das System ausgefallen ist, so betragen die zu erwartenden Kosten

$$\xi_2(6) = V + 4{,}5.$$

Vergleicht man nun die beiden Ergebnisse miteinander, so beträgt die Verringerung der Kosten durch die optimale Strategie gegenüber der Basisstrategie 11,11%. Hieraus ersieht man, daß die Instandhaltung doch erhebliche Kostenersparnisse bewirken kann, so daß der Aufwand für die zusätzliche Datener - fassung bei weitem ausgeglichen wird.

Für V = 1 hat die Zielfunktion den in Abbildung 3 dargestellten Verlauf.

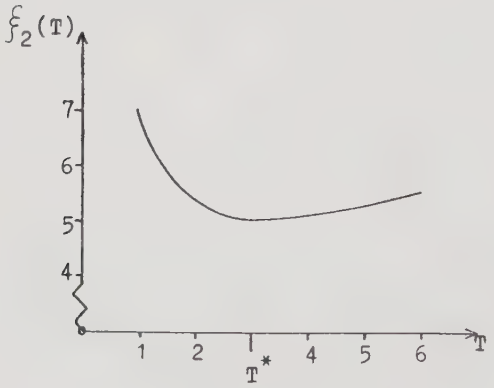


Abb. 4 Zielfunktion Kostenminimierung

Berücksichtigt man bei der Instandhaltungsplanung nicht die Kosten, die durch die minimalen Reparaturen entstehen [1], so führt man unter den Voraussetzungen des Korollars 4.3.5 die vorbeugende Instandhaltung erst zu einem späteren Zeitpunkt durch. Denn die pro Zeiteinheit entstehenden Kosten auf Grund minimaler Reparaturleistungn bilden in Abhängigkeit von der Laufzeit eine monoton steigende Funktion. Somit lassen sie eine kürzere Laufzeit bis zur vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahme vorteilhafter sein als ohne Einbeziehung dieser Kosten.

Erfaßt man die Justierungskosten und die anfänglichen Startkosten V nicht, so liegt der optimale Instandhaltungszeitpunkt früher, und der prozentuale Anteil der ausfallbedingten Instandsetzungen nimmt ab. Denn die Justierungskosten erhöhen die pro Zeiteinheit entstehenden Kosten, und es ist günstiger, sie auf einen längeren Zeitraum zu verteilen, auch wenn dadurch die Ausfälle zunehmen.

Um diese sehr unterschiedlichen Auswirkungen der einzelnen Instandhaltungsgruppen auch quantitativ deutlich zu machen, nehmen wir an, daß die Ausfallverteilung durch eine Weibullverteilung mit den Parametern $\alpha = 2$, $\lambda = 0.005$ gegeben ist, und die minimalen Reparaturen ebenfalls Weibull-verteilt sind mit $\alpha = 2$, $\lambda = 1$. Die Startkosten V_n seien rechteck-verteilt über dem Intervall $[0,100]$. Die Laufzeitkosten bilden eine lineare Funktion $g(t) = a \cdot t$ mit $a = 5$.

Die Stillstandskosten und -zeiten betragen:

C_f	C_p	C_r	C_M
120	70	10	1

1) vgl. Spickenheuer[143],S. 161f

Laufzeitabhängige Stillstandskosten und -zeiten berücksichtigen wir nicht.

Unter diesen Voraussetzungen ist der optimale vorbeugende Instandhaltungszeitpunkt $T^* = 4.66$. Die zu erwartenden Kosten pro Zeiteinheit belaufen sich auf $\xi_2(T^*) = 84.95$, und es sind während der Laufzeit $E(LZ(T^*)) = 4.5$ durchschnittlich 20.85 minimale Reparaturen durchzuführen. Berücksichtigt man diese minimalen Reparaturen nicht, so ist die optimale Strategie $T^* = 5.46$; dies ist eine Verschiebung um 17.17%. Man läßt also die Anlage auf Grund der geringeren Kosten länger in Betrieb, bevor man sie vorbeugend instandhält.

Bezieht man nun auch die Justierungselemente nicht mehr mit ein ($V=C_r=0$), so führt man die vorbeugende Instandhaltung wieder früher durch, und zwar nach einer Laufzeit von $T^*=5.1$, was eine Verkürzung der Laufzeit um 6.59% gleichkommt.

4.3.3 MAXIMIERUNG DES ZU ERWARTENDEN NUTZUNGSGRADES

Betrachtet man die Nutzungszeit (=Laufzeit) eines Systems bis zu einem Zeitpunkt t der Betriebszeit, so prüft man leicht nach, daß dies einen kumulativen Prozeß bildet. Daher erhalten wir für die Zielfunktion bei einem unendlichen Planungshorizont:

$$(4.3.22) \qquad \xi_3(T) := \frac{E(LZ_n(T))}{E(LZ_n(T))+E(SZ_n(T))} \longrightarrow \max!$$

Setzen wir voraus, daß $0 < \xi_3(T) < \infty$ $(T \in \mathbb{R}^+)$, so ist diese Zielfunktion äquivalent zu:

$$(4.3.23) \qquad \hat{\xi}_3(T) := \frac{1}{\xi_3(T)} = 1 + \frac{E(SZ_n(T))}{E(LZ_n(T))} \longrightarrow \min!$$

Wir können uns somit auf die Minimierung des 2. Summanden beschränken, d.h. gesucht ist nun das optimale T^*, welches das Verhältnis von zu erwartender Stillstandszeit zum Erwartungswert der Laufzeit minimiert.

Eine notwendige Bedingung für ein optimales T^* erhält man aus der 1. Ableitung des 2. Summanden aus (4.3.23):

$$(4.3.24) \qquad \frac{dE(SZ_n(T))}{dT} \int_0^T \overline{F}(t)dt - E(SZ_n(T)) \cdot \overline{F}(T) = 0$$

Dies bedeutet, daß jede Verlängerung der optimalen Laufzeit bis zur vorbeugenden Instandhaltung um eine Zeiteinheit die zu erwartende Laufzeit prozentual weniger erhöht als die Stillstandszeiten. Legt man den Zeitpunkt für eine vorbeugende Instandhaltung um eine Zeiteinheit vor dem optimalen Zeitpunkt T^*, so ist die prozentuale Kürzung der Laufzeit geringer als die der Stillstandszeit. Unter einer endlichen, optimalen Strategie sind somit diese prozentualen Verän - derungen gleich.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie erhalten wir in folgendem Satz:

Satz 4.3.6 Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(4.3.6.1) $0 \leq T_p < T_f \quad , \quad 0 \leq q_p(t) \leq q_f(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+)$

$T_M > 0$

(4.3.6.2) ϕ und/oder ϕ_M sind aus (K1)

oder

(4.3.6.2)' ϕ und ϕ_M sind aus (K2); der Zuwachs der laufzeitabhängigen Stillstandszeiten $\hat{q}_p'(T)$ wird ab hinreichend großem T_0 größer als $(\hat{\xi}_3^{\infty} - 1)$ mit $\hat{\xi}_3^{\infty} = \lim_{T \to \infty} \hat{\xi}_3(T)$ und $\overline{F}(T_0) \neq 0$.

Unter diesen Voraussetzungen ist die vorbeugende Instandhaltung der Basisstrategie überlegen.

Beweis: Eine endliche Strategie ist besser als die Basisstrategie, wenn $\hat{\xi}_3(T) < \hat{\xi}_3^{\infty}$ ist für ein endliches T. Da wir uns auf die Maximierung des Verhältnisses von Stillstandszeit zu Laufzeit beschränken können, erhalten wir durch Umformung die Bedingung:

$$(\hat{\xi}_3^{\infty} - 1) \cdot E(LZ_n(T)) - E(SZ_n(T)) > 0$$

Die linke Seite strebt für $T \to \infty$ gegen Null, so daß es besser ist, vorbeugende Maßnahmen durchzuführen, als bis zum Ausfall zu warten, wenn ab hinreichend großem T_0 die linke Seite monoton fallend ist. Die Ableitung

$$\overline{F}(T)\left[(\hat{\xi}_3^{\infty} - 1) - (T_M \phi_M(T) + (\hat{T}_f(T) - \hat{T}_p(T))\phi(T) + \hat{q}_p'(T))\right]$$

ist unter obigen Voraussetzungen ab hinreichend großem T_0 negativ, so daß eine bessere Strategie als die Basisstrategie existiert. ▲

Unter der optimalen Strategie nimmt die Zielfunktion den Wert an

$$\xi_3(T^*)=\begin{cases}\left[1+\phi_M(T^*)\cdot T_M+(\hat{T}_f(T^*)-\hat{T}_p(T^*))\cdot\phi(T^*)+\hat{q}_p'(T^*)\right]^{-1} & \text{für } 0<T^*<\infty \\ \dfrac{\mu}{\mu+T_M\cdot\int_0^\infty \phi_M(t)\bar{F}(t)dt+T_f+T_r+\int_0^\infty q_f(t)dF(t)} & \text{für } T^*\to\infty\end{cases}$$

Der Satz 4.3.6 sichert uns nur die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie. Dabei kann die Zielfunktion $\xi_3(T)$ mehrere lokale Maxima haben. Die optimale Strategie ist dabei durch T_0 nach oben beschränkt. Wir können uns bei der Suche nach dem absoluten Maximum auf das kleinste T beschränken, welches uns ein lokales Maximum der Zielfunktion liefert, wenn einige weitere Voraussetzungen erfüllt sind.

Korollar 4.3.7 Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 4.3.6 gelte:

(4.3.7.1) Die Ausfallraten ϕ und ϕ_M seien monoton steigend.

(4.3.7.2) Die Differenz zwischen den laufzeitabhängigen Stillstandszeiten der ausfallbedingten und vorbeugenden Instandhaltung $g_f(t)-g_p(t)$ $(t\in\mathbb{R}^+)$ sei monoton steigend.

(4.3.7.3) Der Zuwachs der laufzeitabhängigen Stillstandszeiten $\hat{g}_p'(t)$ sei monoton steigend.

Unter diesen Voraussetzungen wird der Nutzungsgrad maximiert durch die kleinste Strategie T^*, die uns ein lokales Maximum liefert.

Beweis: In einem endlichen lokalen Maximum hat die Zielfunktion den Wert:

$$\xi_3(T) = \left[1 + T_M\phi_M(T) + (\hat{T}_f(T) - \hat{T}_p(T))\phi(T) + \hat{q}_p'(T)\right]^{-1}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist diese Zielfunktion monoton fallend in T, so daß wir uns auf das kleinste T beschränken können, welches die Zielfunktion lokal maximiert.▲

Haben wir keine Elemente in der Gruppe G1, die mit minimaler Reparatur instandgehalten werden, so verschiebt sich der optimale Zeitpunkt für eine vorbeugende Instandhaltung auf einen späteren Zeitpunkt, falls die Bedingungen des Korollars 4.3.7 erfüllt sind [1]. Denn in der Bedingungsgleichung (4.3.24) entfällt der Term

$$\left[T_M \cdot \phi_M(T) \cdot \int_0^T \overline{F}(t)dt - T_M \cdot \int_0^T \phi_M(t)\overline{F}(t)dt\right] \overline{F}(T) \ .$$

Da dieser Ausdruck unter den Voraussetzungen nicht negativ wird, nimmt die Zielfunktion unter der gleichen Strategie T^* oder unter einer größeren als in dem vorher diskutierten Fall ihr Optimum an. Dies liegt darin begründet, daß durch die monoton steigende Ausfallrate $\phi_M(t)$ mit wachsendem T die benötigte Zeit für minimale Reparaturen ebenfalls anwächst.[2]

Den entgegengesetzten Effekt erzielt man, wenn auch in Gruppe 3 keine Elemente sind, so daß das System nur aus Teilen besteht, bei deren Ausfall ein vollständiger Ersatz

---

1) Dieser Fall wird in Spickenheuer [143] , S. 162ff diskutiert. Die dort abgeleiteten Bedingungen für die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie sind restriktiver als die Bedingungen des Satzes 4.3.6 . Sie sichern aber ab, daß entsprechend Korollar 4.3.7 das kleinste T mit einem lokalen Maximum auch die Stelle des absoluten Maximums ist.

2) Dies sind die gleichen Auswirkungen wie bei der Kostenminimierung.

bzw. eine Generalüberholung notwendig ist [1]. Der Zeitpunkt für eine vorbeugende Instandhaltung liegt dann wieder früher.

Können wir alle Teile der Anlage mit minimaler Reparatur instandhalten und entstehen keine laufzeitabhängigen Kosten, so erhalten wir das Modell von Barlow und Hunter [2]. Ist in diesem Modell die Ausfallrate konstant, so wird man immer nur minimale Reparaturen durchführen und nie das ganze System austauschen, da die bedingte Wahrscheinlichkeit, nach Erreichen eines Alters t im nächsten Augenblick auszufallen, für alle Zeitpunkte t konstant ist.

Um die Vorteile einer vorbeugenden Instandhaltungsplanung auch bei der Nutzungsgradmaximierung aufzuzeigen, nehmen wir an, daß die Ausfälle der Elemente aus Gruppe 2 Weibull-verteilt sind mit $\alpha = 2$ und $\lambda = 0.005$. Die minimalen Reparaturen seien ebenfalls Weibull-verteilt, jedoch mit $\alpha = 2$ und $\lambda = 1$. Außerdem gelte:

T_f	T_p	T_r	T_M
1	0.5	0.1	0.01

Laufzeitabhängige Stillstandskosten berücksichtigen wir in diesem Beispiel nicht.

Der optimale vorbeugende Instandhaltungszeitpunkt liegt nach einer Laufzeit von $T^* = 7.07$. Die zu erwartende Laufzeit $E(LZ_n(T^*))$ beträgt dann 6.25, und die zu erwartende Stillstandszeit hat die Länge 1.15. Der optimale Nutzungsgrad hat dann den Wert $\xi_3(T^*) = 0.85$. Gegenüber der Basisstrategie bedeutet dies eine Verbesserung des Nutzungsgrades um 6%.

---

1) Dies entspricht dem in Wolff, Subramanian [183], S. 16ff diskutierten Modell. Dabei werden die Voraussetzungen dort so formuliert, daß die Zielfunktion streng konkav ist und somit genau eine optimale Strategie existiert.

2) vgl. Barlow, Hunter [8], S. 90ff

Unter der optimalen Strategie werden während der Laufzeit im Durchschnitt 44.23 minimale Reparaturen durchgeführt, so daß die hierzu benötigte Zeit auch schon recht groß wird.

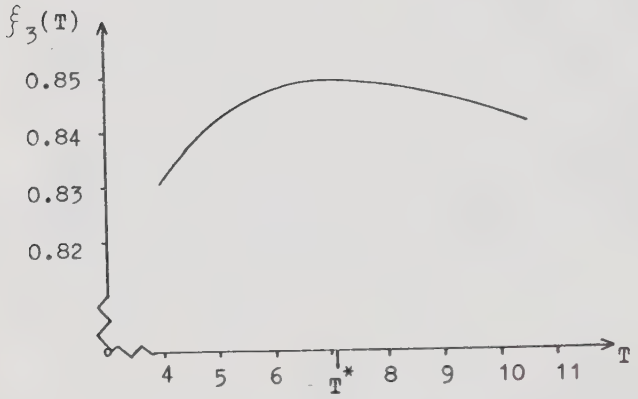


Abb. 5 Zielfunktion Nutzungsgradmaximierung

Wie man aus der Abbildung sieht, verringern Abweichungen von der optimalen Strategie $T < T^*$ den Nutzungsgrad stärker als Abweichungen $T > T^*$.

4.4 KOSTENABHÄNGIGE STRATEGIE

Bei der kostenabhängigen Strategie geschehen die vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahmen nicht in deterministischen, periodischen Zeitabständen wie bei der laufzeitabhängigen Strategie. Vielmehr werden diese Abstände von der Kostenentwicklung während der Nutzungszeit bestimmt. Gesucht ist eine optimale Grenze c für die während der Laufzeit entstehenden Kosten, so daß die Anlage vorbeugend instandgehalten wird, wenn diese Kostengrenze vor einem Ausfall eines Elementes aus Gruppe 2 erreicht wird.[1)]

Die Laufzeitkosten des n-ten Systems zum Zeitpunkt t der Nutzungszeit seien gegeben durch die Startkosten V_n und die gemeinsame Kostenfunktion g der drei Instandhaltungsgruppen.[2)] Sind die Anfangskosten V_n schon größer als die Kostengrenze c, so wird die Anlage nicht in Betrieb genommen, sondern es wird die Anlage neu justiert, falls dadurch die Kosten V_n unter die Grenze c gedrückt werden können. Es wird eine neue Anlage installiert, falls in V_n die unterschiedliche Teilequalität berücksichtigt wird und somit die Kosten durch eine Justierung nicht niedriger als c werden. Ist V_n also größer als c, so ist die Laufzeit der Anlage gleich Null. Dabei nehmen wir an, daß die Höhe der Startkosten durch einen Probelauf festgestellt wird. Die hierfür benötigte Zeit und die entstehenden Kosten werden der Stillstandszeit bzw. den Stillstandskosten zugerechnet. Wir betrachten die Anlage nach der Instandhaltungsmaßnahme als das (n+1)-te System, gleichgültig ob nur eine Justierung oder ein vollständiger Ersatz vorgenommen wurde,[3)] denn die Anlage befindet sich in einem neuwertigen Zustand.

---

1) Da wir auch hier einen unendlichen Planungshorizont betrachten, ist die optimale, periodische Strategie c^* nicht durch eine sequentielle $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu verbessern.

2) Alle in diesem Abschnitt verwendeten Größen sollen die gleichen Eigenschaften wie in Abschnitt 4.2 besitzen, falls nichts anderes ausdrücklich erwähnt ist.

3) Unterschiedliche Kosten entsprechend dem Umfang der Instandhaltungsmaßnahmen werden jedoch berücksichtigt, wie auch die unterschiedlich langen Instandsetzungszeiten (s.u.).

Sind die Kosten V_n niedriger als c, so bestimmt man den Zeitpunkt $t_n(c)$ einer vorbeugenden Instandhaltung aus der Bedingungsgleichung:

$$(4.4.1) \qquad V_n + g(t_n(c)) = c$$

Diese Gleichung sagt jedoch noch nichts über die Existenz und Eindeutigkeit des Zeitpunktes $t_n(c)$ aus. Wir setzen jedoch im folgenden voraus, daß g eine streng monoton steigende Funktion ist mit $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Dann besitzt (2.1) genau eine eindeutig bestimmte Lösung für jede Realisation von V_n, die kleiner oder gleich c ist. Der Zeitpunkt $t_n(c)$ ist dann gegeben durch:

$$t_n(c) = \begin{cases} g^{-1}(c-V_n) & \text{für } V_n \leqq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Ersatzzeitpunkt $t_n(c)$ ist somit keine deterministische Größe mehr, sondern ebenfalls eine stochastische Variable in Abhängigkeit von den stochastischen Anfangskosten V_n.

Dennoch können wir die Instandhaltung zum Zeitpunkt $t_n(c)$ als eine geplante, vorbeugende Maßnahme betrachten. Denn sobald die Anlage in Betrieb genommen wurde, wissen wir, wie hoch die Startkosten V_n sind, und damit liegt dann der Zeitpunkt der vorbeugenden Instandhaltung fest.

V_n besitze die differenzierbare Verteilungsfunktion G; so ist die Verteilungsfunktion des vorbeugenden Instandhaltungszeitpunktes gegeben durch:

$$H(x) := P\{t_n(c) \leqq x\} = \begin{cases} 1-G(c-g(x)) & \text{für } g(x) \leqq c \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Laufzeit des n-ten Systems hat unter der kostenabhängigen Strategie die Länge:

$$LZ_n(c) = \min\{X_n, t_n(c)\}.$$

Die Laufzeit besitzt die Verteilungsfunktion

$$H^c(x) := 1 - \bar{F}(x) \cdot \bar{H}(x)$$

mit $\bar{H}(x) := 1-H(x)$.

Die Zahl der Ausfälle, die mit minimaler Reparatur behoben werden können, beträgt nun $N_M(LZ_n(c))$, so daß die minimalen Reparaturen insgesamt die Stillstandszeit $N_M(LZ_n(c)) \cdot T_M$ verursachen.

Die Zeit, die für die Erneuerung und die Justierung benötigt wird, ist gegeben durch:

(4.4.2) $$\hat{T}_{f,n}(c) := T_{f,n} + q_f(LZ_n(c))$$

(4.4.3) $$\hat{T}_{p,n}(c) := T_{p,n} + q_p(t_n(c))$$

(4.4.4) $$\hat{T}_{r,n}(c) := T_{r,n} + q_r(LZ_n(c))$$ [1)]

Bei der Beschreibung der gesamten Stillstandszeit während eines Zyklus unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) Überschreitet V_n die Kostengrenze c, so wird die Anlage nur neu justiert.
Die gesamte Stillstandszeit beträgt dann:

(4.4.5) $$SZ_n^1(c) := I_c(V_n) \cdot [I_{t_n(c)}(X_n) \cdot \hat{T}_{f,n}(c) + \bar{I}_{t_n(c)}(X_n) \hat{T}_{p,n}(c) + \hat{T}_{r,n}(c)] + \bar{I}_c(V_n) \cdot T_{r,n} + N_M(LZ_n(c)) \cdot T_M$$

(2) Die Anlage wird ganz ausgetauscht, falls $V_n \geq c$.
Die Stillstandszeit erhöht sich dann um die laufzeit-

1) vgl. (4.3.3);(4.3.4);(4.3.5)

unabhängigen Kosten für einen Austausch. Hierbei nehmen wir die Zeit für eine vorbeugende Instandhaltung, da man die Überschreitung von c durch einen Probelauf feststellt und die Instandhaltungsmannschaft noch bereit steht:

$$(4.4.6) \qquad SZ_n^2(c) := SZ_n^1(c) + \bar{I}_c(V_n) \cdot T_{p,n}.$$

Bei den entstehenden Kosten müssen wir nun ebenfalls berücksichtigen, daß sie von der Kostengrenze c abhängen und wir die Unterscheidung bei den Stillstandszeiten auch bei den Stillstandskosten machen müssen.

Die Laufzeitkosten des n-ten Zyklus betragen:

$$(4.4.7) \qquad LK_n(c) := \int_0^{LZ_n(c)} \left[V_n + g(t) \right] dt.$$

Erneuerung und Justierung verursachen folgende Kosten:

$$(4.4.8) \qquad \hat{C}_{f,n}(c) := C_{f,n} + g_f(LZ_n(c))$$

$$(4.4.9) \qquad \hat{C}_{p,n}(c) := C_{p,n} + g_p(t_n(c))$$

$$(4.4.10) \qquad \hat{C}_{r,n}(c) := C_{r,n} + g_r(LZ_n(c)) \qquad .^{1)}$$

Im Fall (1) betragen dann die Stillstandskosten:

$$(4.4.11) \quad SK_n^1(c) := I_c(V_n) \left[I_{t_n(c)}(X_n) \cdot \hat{C}_{f,n}(c) + \bar{I}_{t_n(c)}(X_n) \hat{C}_{p,n}(c) + \hat{C}_{r,n}(c) \right] + \bar{I}_c(V_n) \cdot C_{r,n} + N_M(LZ_n(c)) \cdot C_M$$

---

1) vgl. Abschnitt 4.3

Tauscht man jedoch die gesamte Anlage aus, so erhöhen sich die Kosten ebenfalls um die laufzeitunabhängigen Austauschkosten:

$$SK_n^2(c) := SK_n^1(c) + \bar{I}_c(V_n) \cdot C_{p,n} \qquad (4.4.12)$$

4.4.1 MAXIMIERUNG DES ZU ERWARTENDEN GEWINNS PRO BETRIEBSZEITEINHEIT

Bei der Zielsetzung Gewinnmaximierung wird man zunächst keine kostenabhängige Strategie einschlagen, sondern man wird vielmehr eine Untergrenze für den entstehenden Gewinn optimal bestimmen, bei deren Erreichung eine vorbeugende Instandhaltung durchgeführt wird.

Gehen wir wieder von einem konstanten Bruttogewinn G pro Zeiteinheit aus und berücksichtigen zeitliche Gewinn - schwankungen als Opportunitätskosten [1], so bestimmt man den Zeitpunkt des vorbeugenden Ersatzes aus:

$$G - (V_n + g(t_n(\hat{c}))) = \hat{c}$$

Dies ist jedoch äquivalent zu:

$$V_n + g(t_n(\hat{c})) = G - \hat{c}$$

Hieraus folgt nun, daß man ebenso die Kostenuntergrenze c optimal bestimmen kann, denn zwischen c und $\hat{c}$ besteht die Beziehung:

$$c = G - \hat{c} \tag{4.4.13}$$

Daher werden wir auch bei der Gewinnmaximierung die Kostengrenze c bestimmen, aus der man dann direkt $\hat{c}$ errechnen kann.

Der bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t entstehende Gewinn $C_t(c)$ bildet einen kumulativen Prozeß, so daß man bei einem unendlichen Planungshorizont erhält:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C_t^i(c)}{t} = \frac{E(G_n^i(c))}{E(Z_n^i(c))} =: \xi_1^i(c) \to \max! \tag{4.4.14}$$

$$(n \in \mathbb{N} \quad , \; i = 1,2)$$

1) vgl. Abschnitt 4.3.1

Hierbei ist $G_n^i(c)$ der Gewinn eines Zyklus unter Abzug der Instandhaltungskosten und $Z_n^i(c)$ ist die zugehörige Zykluslänge, wobei i = 1,2 angibt, ob wir im Fall $V_n \geq c$ nur justieren (i=1) oder die ganze Anlage erneuern müssen (i=2).

Der Erwartungswert des Gewinns pro Zyklus beträgt:

$$(4.4.15) \quad E(G_n^i(c)) = G \cdot E(LZ_n(c)) - E(K_n^i(c))$$

$K_n^1(c)$ sind die Kosten, falls nur justiert wird. Deren Erwartungswert ist die Summe aus den zu erwartenen Laufzeitkosten, Kosten der minimalen Reparaturen, den Kosten der Erneuerung und der Justierung:

$$E(K_n^1(c)) = \int_0^c \int_0^{g^{-1}(c-v)} [v+g(t)] \cdot \bar{F}(t)\,dt\,dG(v) + C_M \cdot \int_0^c \int_0^{g^{-1}(c-v)} \phi_M(t)\bar{F}(t)\,dt\,dG(v) +$$

$$\int_0^c \Bigg[(C_f - C_p) \cdot F(g^{-1}(c-v)) + C_p + \int_0^{g^{-1}(c-v)} g_f(t)\,dF(t) +$$

$$\bar{F}(g^{-1}(c-v)) \cdot \hat{g}_p'(g^{-1}(c-v)) \Bigg] dG(v) + C_r$$

Für i=2 erhält man die zu erwartenden Kosten für i=1 vermehrt um die zu erwartenden Kosten des vorbeugenden Ersatzes (laufzeitunabhängig), wenn die Startkosten schon größer als die Kostenschranke sind.

$$E(K_n^2(c)) = E(K_n^1(c)) + \bar{G}(c)\, C_p$$

Der Erwartungswert der Laufzeit beträgt:

$$E(LZ_n(c)) = \int_0^c \int_0^{g^{-1}(c-v)} \bar{F}(t)\,dt\,dG(v)$$

Für die zu erwartende Stillstandszeit erhält man für i=1:

$$E(SZ_n^1(c)) = T_M \int_0^c \left[\int_0^{g^{-1}(c-v)} \phi_M(t) \cdot \bar{F}(t) dt \right] dG(v) + T_r +$$
$$\int_0^c \left[(T_f - T_p) \cdot F(g^{-1}(c-v)) + C_p + \int_0^{g^{-1}(c-v)} q_f(t) dF(t) + \right.$$
$$\left. \bar{F}(g^{-1}(c-v)) \cdot \hat{q}_p'(g^{-1}(c-v)) \right] dG(v)$$

Für i=2 gilt:

$$E(SZ_n^2(c)) = E(SZ_n^1(c)) + \bar{G}(c) \cdot T_p .$$

Im stationären Fall kann man wieder zeigen, daß die optimale deterministische Strategie c^* nicht durch eine stochastische Strategie verbessert werden kann. [1)]

Eine notwendige Bedingung für eine optimale, vorbeugende Strategie liefert die 1. Ableitung nach c. Aus ihr folgt, daß im Optimum die prozentuale Veränderung des Gewinns gleich der prozentualen Veränderung der Zyklenlänge sein muß, d.h. die Elastizität des Gewinns bzg. der Zyklenlänge ist unter der optimalen Strategie gleich eins:

$$(4.4.16) \qquad \frac{\frac{d\, E(G_n^i(c))}{dc}}{E(G_n^i(c))} = \frac{\frac{d\, E(Z_n^i(c))}{dc}}{E(Z_n^i(c))} \qquad (n \in \mathbb{N},\ i=1,2)$$

Maximieren wir den Gewinn einer Periode, so erhalten wir aus (4.4.15) die Bedingung, daß für eine endliche, optimale Strategie der Grenzerlös den Grenzkosten bzg. c gleich sein muß, d.h.

---

1) Dem Beweis liegen wieder die Ausführungen von Barlow, Proshan [9] , S. 68 f zugrunde.

$$(4.4.17) \qquad G \cdot \frac{d\,E(Z_n(c))}{dc} = \frac{d\,E(K_n^i(c))}{dc} \quad .$$

Es gilt jedoch:

$$(4.4.18) \qquad c \cdot \frac{d\,E(LZ_n(c))}{dc} = \frac{d\,E(LK_n(c))}{dc}$$

d.h. die Änderung der Laufzeitkosten ist proportional zur Änderung der Laufzeit bzg. c gerade mit der Kostengrenze c als Proportionalsfaktor.

Somit läßt sich (4.4.17) umformen zu:

$$(4.4.19) \qquad (G-c) \cdot \frac{d\,E(LZ_n(c))}{dc} = \frac{d\,E(SK_n^i(c))}{dc} \qquad (n \in \mathbb{N}, i=1,2)$$

d.h. unter der optimalen Strategie ist die Gewinnuntergrenze $(G-c)$ [1] gleich dem Quotienten aus Stillstandskosten- und Laufzeitänderung bzg. c.

Die Ableitung der Laufzeit nach c ergibt:

$$\frac{d\,E(LZ_n(c))}{dc} = \int_0^c \left[\overline{F}(g^{-1}(c-v)) \; \frac{d\,g^{-1}(c-v)}{dc} \right] dG(v)$$

Für die Änderung der Stillstandskosten bzg. c erhält man:

$$\frac{d\,E(SK_n^1(c))}{dc} = C_M \int_0^c \left[\frac{dg^{-1}(c-v)}{dc} \; \phi_M(g^{-1}(c-v)) \; \overline{F}(g^{-1}(c-v)) \right] dG(v) +$$

$$C_p \frac{dG(c)}{dc} + \int_0^c \left[(\hat{C}_f(c) - \hat{C}_p(c)) \; f(g^{-1}(c-v)) + \right.$$

$$\left. \hat{g}_p'(g^{-1}(c-v)) \; \overline{F}(g^{-1}(c-v)) \right] \frac{dg^{-1}(c-v)}{dc} \; dG(v)$$

---

1) vgl. (4.4.13)

mit $\hat{C}_\cdot(c) := C_\cdot + g_\cdot(g^{-1}(c-v))$

und $$\frac{d\,E(SK_n^2(c))}{dc} = \frac{d\,E(SK_n^1(c))}{dc} - C_p \cdot \frac{dG(c)}{dc} .$$

Lemma 4.4.1: Unter den Voraussetzungen [1]

(4.4.1.1) $$0 \leqq C_p < C_f \quad , \quad 0 \leqq g_p(t) \leqq g_f(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

$$C_M \geqq 0$$

(4.4.1.2) Die Wahrscheinlichkeit, daß die Startkosten schon größer als der entstehende Gewinn ist, sei kleiner eins d.h. $P\{V_n \leqq G\} \neq 0$; denn sonst würden nur Verluste entstehen. Außerdem sei $\overline{F}(t) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}^+$.

gibt es für den Zähler (4.4.15) der Zielfunktion eine endliche, optimale Strategie c_i^* (i=1,2).

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt, daß die 1. Ableitung des Zählers ab hinreichend großem c_o negativ wird, da die rechte Seite von (4.4.19) nicht negativ ist und die linke Seite für $c > G$ negativ wird. ▲

Das optimale c_i^* (i=1,2) kann hierbei auch den Wert Null annehmen. Dann entsteht jedoch kein Gewinn mehr, sondern der Verlust wird minimiert, indem die Anlage fortlaufend instandgehalten wird. Dies muß dann zur Folge haben, daß die Anlage stillgelegt wird oder durch eine verbesserte, mit anderem Ausfallverhalten und anderen Kosten ersetzt wird.

Die optimale Obergrenze c_i^*(i=1,2) muß jedoch nicht die einzige Lösung für die Bedingungsgleichung (4.4.19) sein. Jedoch läßt sich c_i^*(i=1,2) nach oben abschätzen, wie aus dem Beweis zu Lemma 4.4.1 folgt:

Korollar 4.4.2: Die optimale Kostengrenze c_i^*(i=1,2) ist unter den Voraussetzungen von Lemma 4.4.1 durch den Gewinn G pro Zeiteinheit beschränkt, d.h. man ergreift vorbeugende

1) Die Monotonie- und Differenzierbarkeitseigenschaften werden entsprechend Abschnitt 4.3 stillschweigend vorausgesetzt. Jedoch ist g hier streng monoton steigend.

Instandhaltungsmaßnahmen auf jeden Fall bevor die entstehenden Laufzeitkosten gleich dem entstehenden Gewinn sind.

Vergleicht man die beiden Fälle, i=1 und i=2, so ergibt sich folgendes Ergebnis:

Korollar 4.4.3: Ist die Kostengrenze $\tilde{c}_1^*$ positiv, so ist $\tilde{c}_1^*$ niedriger als die Kostengrenze $\tilde{c}_2^*$, falls die Kosten C_p der vorbeugenden Erneuerung positiv sind, und die Voraussetzungen von Lemma 4.4.1 erfüllt sind. Dies bedeutet, daß die höheren Kosten, die im Fall i=2 entstehen, wenn die Startkosten V_n größer als c sind, den Zeitpunkt einer vorbeugenden Maßnahme später legen im Vergleich zum Fall i=1. Hierdurch werden diese höheren Kosten auf einen größeren Zeitraum verteilt.

Beweis: Formt man die Bedingungsgleichung (4.4.19) um zu

$$(G-c)\cdot\frac{d\,E(LZ_n(c))}{dc} - \frac{d\,E(SK_n^i(c))}{dc} = 0 \quad (n\in\mathbb{N}, i=1,2),$$

so sei diese Gleichung erfüllt für i=1 und $\tilde{c}_1^*$. Die Strategie $\tilde{c}_1^*$ führt jedoch im Fall i=2 dazu, daß die linke Seite positiv ist, so daß $\tilde{c}_2^*$ größer sein muß als $\tilde{c}_1^*$.▲

Hat man nun hinreichende Bedingungen für eine optimale Strategie gefunden, die den Periodengewinn maximiert, so sollen jetzt die Bedingungen abgeleitet werden, die hinreichend für eine optimale Kostengrenze bei der Zielfunktion $\xi_1^i(c)$ sind.

Satz 4.4.4: Sind die Voraussetzungen von Lemma 4.4.1 erfüllt, und gilt außerdem:

(4.4.3.1) $0 \leqq T_p \leqq T_f$, $0 \leqq q_p(t) \leqq q_f(t)$ $(t\in\mathbb{R}^+)$

$$T_M \geqq 0 ,$$

so existiert eine endliche, optimale Strategie c_i^*, die $\xi_1^i(c)$ (i=1,2) maximiert.

Beweis: Betrachten wir die Ableitung der Stillstandszeiten bzg. c, so erhalten wir:

$$\frac{dE(SZ_n^1(c))}{dc} = T_M \cdot \int_0^c \left[\phi_M(g^{-1}(c-v)) \cdot \bar{F}(g^{-1}(c-v)) \frac{dg^{-1}(c-v)}{dc} \right] dG(v) +$$

$$T_p \cdot \frac{dG(c)}{dc} + \int_0^c \left[(\hat{T}_f(c) - \hat{T}_p(c))\, f(g^{-1}(c-v)) + \right.$$

$$\left. \hat{q}_p'(g^{-1}(c-v))\, \bar{F}(g^{-1}(c-v)) \right] \frac{dg^{-1}(c-v)}{dc}\, dG(v)$$

mit $\hat{T}_\cdot(c) := T_\cdot + q_\cdot(g^{-1}(c-v))$.

Für $E(SZ_n^2(c))$ gilt:

$$\frac{d\, E(SZ_n^2(c))}{dc} = \frac{d\, E(SZ_n^1(c))}{dc} - T_p \cdot \frac{dG(c)}{dc}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.4 ist somit die Zyklenlänge eine monoton steigende Funktion bezüglich c, sowohl wenn nur justiert wird als auch wenn das System völlig erneuert wird.
Besitzt der Zähler der Zielfunktion für eine endliche Strategie ein Maximum - dies ist durch Lemma 4.4.1 gesichert - , so nimmt bei einem monoton steigenden Nenner auch $\xi_1^i(c)$ (i=1,2) für eine endliche Kostengrenze c_i^* das absolute Maximum an.▲

Die optimale Strategie c_i^* (i=1,2) ist auch hier wieder nach oben beschränkt. Aus Satz 4.4.4 folgt:

Korollar 4.4.5: Sind die Voraussetzungen des Satzes 4.4.4 erfüllt, so sind die Kostengrenzen c_i^*(i=1,2) durch die Kostengrenzen $\tilde{c}_i^*$ des Periodengewinns nach oben beschränkt.

Die Zielfunktion nimmt unter der optimalen Strategie den Wert an:

$$\zeta_1^i(c^*) = \begin{cases} \dfrac{\left.\dfrac{d\,G_n^i(c)}{dc}\right|_{c=c_i^*}}{\left.\dfrac{dZ_n^i(c)}{dc}\right|_{c=c_i^*}} & \text{für } 0 < c_i^* < \infty \\[2ex] \dfrac{G\mu - \left[V\mu + \int_0^\infty g(t)F(t)dt + C_M \cdot \int_0^\infty \phi_M(t)\cdot\bar{F}(t)dt + C_f + C_r + \int_0^\infty \hat{g}_f(t)dF(t)\right]}{\mu + T_M \int_0^\infty \phi_M(t)\bar{F}(t)dt + T_f + T_r + \int_0^\infty \hat{q}_f(t)dF(t)} & \text{für } c_i^* \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Hierbei stimmen die Strategien $c^* \to \infty$ und $T^* \to \infty$ überein, da jeweils bis zum Ausfall eines Elementes aus Gruppe 2 gewartet wird und erst dann eine vorbeugende Instandsetzung vorgenommen wird.

Auf Grund des elementaren Erneuerungstheorems erhalten wir für die zu erwartende Zahl der Zyklen im stationären Fall

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{E(\mathcal{L}_n^i(c_i^*))} \qquad (i=1,2)$$

Die Zahl der Justierungen bzw. völligen Ersetzungen, weil die Anfangskosten schon die Kostengrenze c_i^* überschreiten, beträgt pro Zeiteinheit:

$$N_e(c_i^*) = \frac{G(c_i^*)}{E(Z_n^i(c_i^*))}$$

Für die Zahl der ausfallbedingten Instandsetzungen pro Zeiteinheit erhält man:

$$N_f(c_i^*) = \frac{\int_0^{c_i^*} F(\bar{g}^1(c_i^*-v))dG(v)}{E(Z_n^i(c_i^*))}$$

und die Zahl der vorbeugenden Instandhaltungen ist

$$N_p(c_i^*) = \frac{\int_0^{c_i^x} \bar{F}(\bar{g}^1(c_i^*-v))dG(v)}{E(Z_n^i(c_i^*))} \quad (i=1,2).$$

Um die Verbesserungen durch die kostenabhängige Strategie gegenüber der Basisstrategie deutlich zu machen, wollen wir die optimale Kostengrenze für eine Anlage bestimmen, bei der keine minimalen Reparaturen auftreten und die Stillstandskosten und -zeiten nicht laufzeitabhängig sind. Die Anfangskosten V_n seien rechteck-verteilt über dem Intervall $[0,100]$. Die Laufzeitkosten seien durch eine lineare Funktion $g(t)=a\cdot t$ mit $a=5$ gegeben. Der pro Zeiteinheit entstehende Gewinn G betrage 200.

Für die laufzeitunabhängigen Stillstandskosten und -zeiten gelte:

C_f	C_p	C_r	T_f	T_p	T_r
120	70	10	1.0	0.5	0.1

Wir untersuchen die Zielfunktion für den Fall, daß eine Überschreitung der Kostengrenze zu Beginn durch eine erneute Justierung ohne Teileaustausch beseitigt werden kann. Bei diesen Daten berechnet man die Kostenschranke zu $c^*=58.93$. Die zu erwartende Laufzeit verringert sich gegenüber der Basisstrategie um 51.04%. Der erzielte Gewinn pro Zeiteinheit erhöht sich jedoch hierdurch um 11.51% von 48.39 auf 53.96, so daß die kostenabhängige Strategie eine gute Verbesserung gegenüber dem Warten bis zum Ausfall bedeutet. Der in dem optimalen Zyklus der Länge 1.62 erzielte Gewinn beträgt dann 87.33.

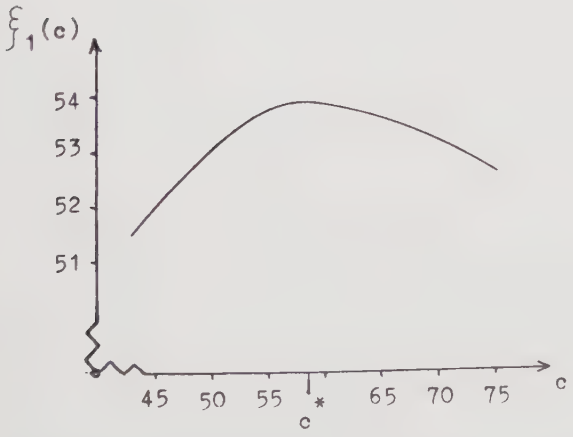


Abb. 6 Zielfunktion Gewinnmaximierung

Auch an diesem Beispiel für die kostenabhängige Strategie zeigt sich, daß die Abweichungen von der optimalen Strategie c^* für $c > c^*$ den Gewinn nicht so stark verringern wie Abweichungen $c < c^*$. Daher empfiehlt es sich auch hier, lieber mit einem größeren c zu starten und sich an das optimale c^* heranzutasten als mit einem $c < c^*$. Denn wird c zu klein gewählt, verschenkt man zu viel mögliche Laufzeit.

4.4.2 MINIMIERUNG DER ZU ERWARTENDEN KOSTEN PRO LAUFZEITEINHEIT

Wir beziehen bei den Kosten sowohl die Laufzeitkosten $LK_n(c)$ wie auch die Stillstandskosten $SK_n^i(c)$ mit ein, unterscheiden jedoch bei den Stillstandskosten danach, ob bei der Überschreitung der Kostenschranke c durch V_n nur justiert wird (Fall i=1) oder ob das ganze System ausgetauscht werden muß (i=2). [1)]

Die entstehenden Kosten bilden einen kumulativen Prozeß, so daß wir als Zielfunktion bei einem unendlichen Planungshorizont erhalten:

$$\int_2^i (c) := \frac{E(K_n^i(c))}{E(LZ_n(c))} \longrightarrow \min! \quad (n \in \mathbb{N}, i=1,2)$$

Eine notwendige Bedingung, die eine optimale Strategie $c_i^* \in (0,\infty)$ erfüllen muß, liefert uns die erste Ableitung bzg.c:

$$(4.4.20) \qquad \frac{d(EK_n^i(c))}{dc} \cdot E(LZ_n(c)) - E(K_n^i(c)) \frac{d(E(LZ_n(c))}{dc} = 0.$$

Dies bedeutet, das im Optimum die Durchschnittskosten gleich den Grenzkosten bzg. c sein müssen.

Hinreichende Bedingungen für eine endliche, optimale Strategie c_i^* erhalten wir in dem folgenden Ergebnis:

Satz 4.4.6: Sind die Voraussetzungen

$$(4.4.6.1) \qquad 0 \leqq c_p < c_f, \quad 0 \leqq g_p(t) \leqq g_f(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

$$c_M \geqq 0$$

---

1) vgl. (4.4.11),(4.4.12)

erfüllt und gilt für die Ausfallverteilung $F(t) \neq 1$ $(t \in \mathbb{R}^+)$, so existiert eine endliche, optimale Strategie c^*.

Beweis: Die Bedingungsgleichung (4.4.20) formen wir unter Ausnutzung der Beziehung (4.4.17) um zu:

$$(4.4.21)\quad \frac{dE(LZ_n(c))}{dc}\,(\,c\cdot E(LZ_n(c)) - E(K_n^i(c))) + E(LZ_n(c))\cdot\frac{dE(SK_n^i(c))}{dc} = 0$$

Die Laufzeit ist streng monoton steigend mit wachsendem c für $c > k := \inf\{\, v \,/\, G(v) \neq o \,\}$ und besitzt somit eine positive Ableitung für $c > k$.

Die Ableitung des Klammerausdrucks ergibt unter Einbeziehung von (4.4.17)

$$E(LZ_n(c)) - \frac{dE(SK_n^i(c))}{dc}$$

Da $E(SK_n^i(c))$ für $c \to \infty$ gegen einen endlichen Erwartungswert konvergiert, strebt die Steigung gegen Null. Die Laufzeitlänge ist jedoch bzg. c eine monoton steigende Funktion. Somit existiert ein $c_o < \infty$, so daß für alle $c \geq c_o$

$$(4.4.22)\qquad c\cdot E(LZ_n(c)) - E(K_n^i(c))$$

positiv wird, d.h. ab c_o bleiben die Durchschnittskosten $\frac{E(K_n(c))}{E(LZ_n(c))}$ immer unterhalb der Kostengrenze c.

Der zweite Summand aus (4.4.21) ist ebenfalls nicht negativ, da die Laufzeit $E(LZ_n(c))$ positiv $(c > k)$ und die Steigung der Grenzkosten des Stillstands bzg. c unter obigen Voraussetzungen ebenfalls nicht negativ ist. Daher ist die linke Seite von (4.4.21) ab hinreichend großem c positiv.

Da aber für $c \to 0$ die Zielfunktion gegen Unendlich strebt, ist die Steigung für hinreichend kleine c (>0) negativ. Da die linke Seite der Bedingungsgleichung (4.4.21) stetig ist, existiert mindestens ein c, das die Gleichung erfüllt und die Zielfunktion minimiert.▲

Da die linke Seite von (4.4.21) positiv ist, sobald (4.4.22) positiv ist, gewinnen wir folgendes Korollar:

Korollar 4.4.7: Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.6 ist die optimale Kostengrenze c_i^* $(i=1,2)$ kleiner als die Durchschnittskosten eines Zyklus bezogen auf die Laufzeit. Die während der Laufzeit entstehenden Kosten $(V_n+g(t))$ bleiben somit bei der optimalen Strategie c_i^* immer unterhalb der Durchschnittskosten der Zielfunktion.

Die Zielfunktion hat für die optimale Strategie den Wert

$$\xi_2^i(c_i^*) = \begin{cases} c_i^* + \dfrac{\left(\dfrac{dE(SK_n(c))}{dc}\Big|_{c=c_i^*} \right)}{\left(\dfrac{dE(LZ_n(c))}{dc}\Big|_{c=c_i^*} \right)} & \text{für } 0 < c_i^* < \infty \\ \dfrac{\int_0^\infty (V+g(t))\bar{F}(t)dt + C_M \cdot \int_0^\infty \phi_M(t)\bar{F}(t)dt + C_f + C_r + \int_0^\infty g_f(t)dF(t)}{\mu} & \text{für } c_i^* \to \infty \end{cases}$$

Auch hier bedeutet $c_i^* \to \infty$, warten bis zu einem Ausfall, bevor eine Instandhaltungsmaßnahme ergriffen wird. In diesem Fall stimmen dann kosten- und laufzeitabhängige Strategie überein.

Besteht das Instandhaltungssystem nur aus justierbaren Elementen der Gruppe 3 und berücksichtigt man keine laufzeitabhängigen Stillstandskosten, so erhält man als Zielfunktion:

$$\xi_2(c) = \frac{\int_0^c \left[\int_0^{g^{-1}(c-v)} (v+g(t))\, dt \right] dG(v) + C_r}{\int_0^c g^{-1}(c-v)\, dG(v)} \longrightarrow \min!$$

Dies stimmt dann mit dem von Wolff und Subramanian behandelten Fall überein. [1] Die dort gemachte Fallunterscheidung zwischen $c \leqq m$ und $c > m$ mit $m := \sup\{ V_n(\omega) / \omega \in \Omega \}$, $m < \infty$ erweist sich als nicht notwendig, wenn man obiger Herleitung der Ergebnisse folgt. Denn durch die Bedingung $m < \infty$ sind z.B. die Weibullverteilung, die logarithmische Normalverteilung und die Gammaverteilung nicht mehr zulässig, die wir jedoch hier mit einschließen konnten.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.6 existiert für diese Zielfunktion eine endliche, optimale Strategie; die Bedingungen sind in diesem Falle sogar hinreichend für die Eindeutigkeit des Minimums. Der Beweis folgt den Ausführungen von Wolff und Subramanian. [2]

Für die gleichen Werte wie im letzten Abschnitt wollen wir auch die Auswirkungen der kostenabhängigen Strategie auf die Kostenminimierung untersuchen.

---

1) vgl. Wolff, Subramanian [184]

2) vgl. Wolff, Subramanian [184], S. 194

Wir haben wieder:

C_f	C_p	C_r	T_f	T_p	T_r
120	70	10	1.0	0.5	0.1

V_n rechteck-verteilt mit Mittelwert 50, G=200 und $g(t)=5 \cdot t$. Als optimale Kostengrenze erhalten wir $c^*=49.71$. Dies liegt knapp unterhalb des Mittelwertes V_n, so daß etwa bei jeder 2-ten Anlage die Justierung zu Anfang korrigiert wird. Die Kosten pro Zeiteinheit sinken durch diese zusätzlichen Justierungen von 125.67 auf 109.96, was eine Ersparnis von 12.50% bedeutet.

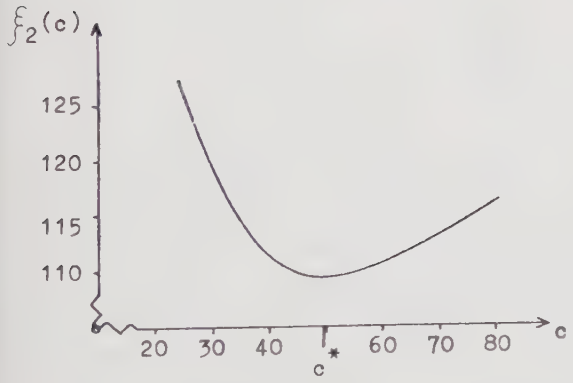


Abb. 7 Zielfunktion Kostenminimierung

Auch hier wirken Abweichungen $c > c^*$ nicht so stark auf die Zielfunktion wie Veränderungen $c < c^*$.

4.5 VERGLEICH ZWISCHEN LAUFZEIT- UND KOSTENABHÄNGIGER STRATEGIE

Bei beiden Strategien werden die Ersatzzeitpunkte durch die Gewinn-und Kostenentwicklung während der Laufzeit des Systems beeinflußt. Bei der laufzeitabhängigen Strategie legt der Entscheidungsträger, z.B. der Leiter der Instandhaltungsabteilung, unter Berücksichtigung der Kosten und Gewinne den Zeitpunkt für einen vorbeugenden Ersatz eines Aggregates fest. Dieser vorbeugende Instandhaltungszeitpunkt T^* ist dann für alle nachfolgenden Aggregate des gleichen Typs identisch. Dadurch besteht für die Instandhaltungsabteilung die Möglichkeit, die vorbeugenden Maßnahmen in ihre Arbeitsplanung langfristig mit einzubeziehen.

Die laufzeitabhängige Strategie hat aber den Nachteil, daß sie durch ihren starren Instandhaltungszyklus die unterschiedliche Justierungsgenauigkeit und die Qualitätsdifferenzen, die selbst bei Serienprodukten auftreten, nicht erfaßt und bei der Festlegung des Instandhaltungszeitpunktes berücksichtigt. Diesen Mangel beseitigt jedoch die hier vorgeschlagene kostenabhängige Strategie. Bei ihr wird kein fester Instandhaltungszyklus T^* aufgestellt , sondern der Ersatzzeitpunkt $t_n(c)$ hängt von der Höhe der Startkosten direkt ab. Durch die Höhe der Startkosten werden aber die Qualitätsunterschiede und die Justierungsgenauigkeit erfaßt. Somit variiert von Aggregat zu Aggregat der vorbeugende Instandhaltungszeitpunkt, was jedoch eine größere Flexibilität der Planung innerhalb der Instandhaltungsabteilung voraussetzt. Es verbleibt aber auch bei der kostenabhängigen Strategie genügend Zeit, den nächsten vorbeugenden Ersatz in die Planung einzubeziehen, wenn die Höhe des Kostenniveaus V_n direkt nach Inbetriebnahme des Aggregats festgestellt werden kann.

Diese größere Anpassungsfähigkeit der kostenabhängigen Strategie an die entstehenden Kosten, wirkt sich dann auch in niedrigeren zu erwartenden Gesamtkosten pro Zeiteinheit aus. Denn bei der laufzeitabhängigen Strategie werden auch solche Aggregate bis zum Zeitpunkt T^* bzw. bis zu ihrem Ausfall betrieblich genutzt,

deren Qualität bzw. Justierung zu Beginn auf einem sehr schlechten Niveau liegt. Bei der kostenabhängigen Strategie werden dagegen die Elemente ausgetauscht oder direkt nochmals justiert, wenn die Kosten schon bei Inbetriebnahme die Schrankec überschreiten. Unter der laufzeitabhängigen Strategie werden diese Elemente dennoch betrieblich genutzt, so daß wesentlich höhere Kosten entstehen. [1)]

Bei der Bestimmung des optimalen Ersatzzeitpunktes im Rahmen der Investitionstheorie stellte sich bisher nicht das Problem, ob man besser einer laufzeit- oder einer kostenabhängigen Strategie folgen soll. Denn der Kostenverlauf während der Laufzeit wurde als deterministisch angenommen.[2)] In diesem Fall sind jedoch die beiden Strategien identisch!

Denn sind die Startkosten V_n keine stochastische Variable, sondern eine nichtnegative Konstante $V_n=V$, so bestimmen sich die optimale Kostengrenze c_i^* und der optimale vorbeugende Instandhaltungszeitpunkt T^* gegenseitig eindeutig durch:

$$T^* = 0 \iff 0 \leqq c_i^* \leqq V$$

$$V+g(T^*)=c_i^* \text{ , falls } T^* \neq 0 \quad \text{bzw. } c_i^* > V.$$

Falls die Kostengrenze oberhalb der Startkosten liegt, sind die beiden Zielfunktionen $\xi^1(c)$ und $\xi^2(c)$ identisch und führen zu den gleichen Strategien $c_1^* = c_2^*$. Daher ist es bei einem deterministischen Kostenverlauf während der Laufzeit des Systems gleichgültig, ob man die optimale Kostengrenze c_i^* oder den Zeitpunkt T^* bestimmt.

---

1) Hierzu siehe die unten folgenden Beispiele
2) vgl. Hax , H.: Investitionstheorie, Würzburg-Wien 1972, S. 30 ff; Schneider [151] , S. 75 ff

Sind die Anfangskosten jedoch eine stochastische Variable, so unterscheiden sich die Zeitpunkte der vorbeugenden Maßnahmen, da diese bei der laufzeitabhängigen Strategie deterministische, periodische, vorbeugende Instandhaltungsaktionen sind, wogegen sie bei der kostenabhängigen Strategie in stochastischen Zeitabständen in Abhängigkeit von den Startkosten erfolgen.

Die kostenabhängige Strategie bietet den Vorteil, daß die während der Laufzeit entstehenden Kosten die Schranke c nicht überschreiten. Damit kann man die Laufzeitkosten eines Zyklus nach oben abschätzen durch $c \cdot g^{-1}(c)$. Eine derartige Abschätzung ist für die laufzeitabhängige Strategie nicht möglich, da wir über die stochastischen Anfangskosten keine näheren Voraussetzungen gemacht haben.

Nicht immer stehen beide Strategien zur Auswahl. Die entstehenden Kosten sind vielfach nicht direkt feststellbar und erfaßbar, da die Qualität der hergestellten Produkte z.B. erst bei einem weiteren Bearbeitungsvorgang bzw. bei einem gesonderten Prüfverfahren feststellbar ist; hierunter fallen die Prüfung von Metallen durch Ultraschall, der Probelauf von Motoren etc..

Da man also keine direkte Kontrolle über die zu einem Zeitpunkt entstehenden Kosten hat, kann man sich nur an der Länge der bisherigen Laufzeit orientieren und wird diese dann als Entscheidungsgröße wählen.

In vielen Fällen ist der Aufwand für die direkte und laufende Erfassung der entstehenden Kosten sehr hoch, so daß man diese immer nur in gewissen Abrechnungsperioden ermittelt. Demgegenüber ist die Aufzeichnung der tatsächlichen Laufzeit einer Anlage mit einem relativ geringen Aufwand zu erreichen, so daß von daher oftmals die laufzeitabhängige Strategie bevorzugt wird.

Ebenso ist die Kostengrenze bei der Nutzungsgradmaximierung kein geeignetes Kriterium zur Unterbrechung einer laufenden Anlage, da ja gerade die Laufzeit ohne Berücksichtigung der

Kosten maximiert werden soll in bezug auf die gesamte Zyklenlänge. Will man hierbei die Kosten berücksichtigen, so fügt man die entstehenden Kosten als Nebenbedingung zur Ziel - funktion hinzu.

Stehen jedoch beide Strategien als Alternativen zur Wahl, so wird man in einer konkreten betrieblichen Situation i.a. beide optimalen Strategien bestimmen müssen, um anschliessend die Werte der Zielfunktion für beide Strategien zu vergleichen und diejenige auszuwählen, die einen besseren Ziel - funktionswert liefert.

Die Vorteile, die jedoch unter Umständen die kostenabhängige Strategie bietet, sollen an einem Beispiel aufgezeigt werden.

Hierzu betrachten wir ein System, daß nur aus einem Justierungselement besteht, und bei dem die Gruppen G1 und G2 keine Elemente enthalten.

Die Anfangskosten sollen rechteckverteilt sein auf dem Intervall $[o,m]$, $m > o$, d.h.

$$G(t) = \begin{cases} o & \text{für } t < o \\ \frac{1}{m} \cdot t & \text{für } o \leq t \leq m \\ 1 & \text{für } t > m \end{cases}$$

Die während der Laufzeit entstehenden Kosten seien durch eine lineare Funktion mit der Steigung $a_1 > o$ gegeben. Die laufzeitabhängigen Stillstandskosten seien ebenfalls eine lineare Funktion $: g_r(t) = a_2 t$, $a_2 \geq o$. Die Justierungskosten seien $C_r > 0$.

Für dieses System soll nun gezeigt werden, daß die Zielfunktin der Kostenminimierung pro Laufzeiteinheit unter der laufzeitabhängigen Strategie immer schlechter ist als unter der kostenabhängigen Strategie.

Bei einem unendlichen Planungshorizont erhalten wir für die laufzeitabhängige Strategie die Zielfunktion [1)]

1) vgl. Kapitel 4.3.2 ; (4.3.19)

$$\xi_2(T) = \frac{\int_0^T [V+a\cdot t]\,dt + C_r}{T}$$

$$= \frac{m}{2} + \frac{1}{2}aT + \frac{C_r}{T} \longrightarrow \min!$$

mit $a = a_1 + a_2$.

Durch die Ableitung erhält man als optimalen Justierungszeitpunkt:

$$T^* = \frac{1}{a}\cdot\sqrt{2aC_r}$$

Wie man leicht nachprüft, ist dies ein Minimum für die Zielfunktion. Für die Ziefkunktion ergibt sich unter der optimalen Strategie der Wert:

(4.5.1) $$\xi_2(T^*) = \frac{m}{2} + \sqrt{2a\,C_r}$$

Die kostenabhängige Zielfunktion lautet: [1)]

$$\xi_2(c) = \frac{\frac{1}{m}\int_0^c \left[\int_0^{\frac{1}{a}(c-v)} (v+a\cdot t)\,dt\right] dv + C_r}{\frac{1}{m\cdot a}\int_0^c (c-v)\,dv} \longrightarrow \min!$$

Hierbei unterscheidet man die beiden Fälle:

(1) $c \leqq m$

(2) $c > m$

In beiden Bereichen bestimmt man die optimale Kostenschranke:

---

1) Dies ist mit dem in Wolff, Subramanian[184]S. 196 f diskutierten Beispiel identisch.

$$c_1^* = \begin{cases} (6\ amC_r)^{1/3} & \text{für } m > \sqrt{6\ aC_r} \\ m & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_2^* = \begin{cases} m & \text{für } m > \sqrt{6\ aC_r} \\ \frac{m}{2} + (2\ aC_r - \frac{m^2}{12})^{1/2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Hieraus erhält man das globale Minimum:

$$\xi_2(c^*) = \min\{\xi_2(c_1^*)\ ,\ \xi_2(c_2^*)\}\ .$$

Wir werden nun zeigen, daß für beliebige Werte von a,m und C_r die Zielfunktion unter der optimalen Strategie T^* einen schlechteren Wert annimmt als unter der Strategie c^*. Hierzu untersuchen wir zunächst den Fall $m > \sqrt{6a\ C_r}$. Für die kostenabhängige Strategie gilt:

$$\xi_2(c_1^*) = c_1^* = (6am\ C_r)^{1/3}$$

$$\xi_2(c_2^*) = \xi_2(m) = \frac{2}{3}m + \frac{2\ aC_r}{m}$$

Ist $\xi_2(T^*) > \xi_2(c_1^*)$, so entspricht dies auf Grund von (4.5.1) der Bedingung

(4.5.2) $$\frac{m}{2} + (2aC_r)^{1/2} > (6\ amC_r)^{1/3}$$

Die Bedingung bleibt auch gültig, wenn man beide Seiten mit 3 potenziert. Nach einigen Umformungen erhält man dann die Bedingung:

(4.5.3) $$m^3 + (6m^2 + 16a\,C_r)\,(2a\,C_r)^{1/2} > 24am\,C_r\ .$$

Da wir zunächst nur den Bereich $m>\sqrt{6aC_r}$ untersuchen, können wir mit $m^2 > 6aC_r$ und $m > (2a\,C_r)^{1/2}\cdot\sqrt{3}$ die linke Seite der Bedingung (4.5.3) abschätzen durch

$$m^3+(6m^2+16a\,C_r)(2a\,C_r)^{1/2} > 6am\,C_r+(36a\,C_r+16a\,C_r)\cdot\frac{m}{3}\sqrt{3}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung läßt sich weiter abschätzen durch

$$(6 + \frac{52}{3}\sqrt{3})\cdot a\cdot m\cdot C_r > 24amC_r,$$

so daß die Bedingung (4.5.2) für $a>o$, $C_r>o$ immer erfüllt ist. Da $\xi_2(c^*) = \min\{\xi_2(c_1^*), \xi_2(c_2^*)\}$ ist die kostenabhängige Strategie im Bereich $m>\sqrt{6a\,C_r}$ die bessere.

Für den Bereich $m\leq\sqrt{6a\,C_r}$ erhalten wir die Zielfunktionen

$$\xi_2(c_1^*) = \xi_2(m) = \frac{2}{3}\,m + \frac{2a\,C_r}{m}$$

$$\xi_2(c_2^*) = c_2^* = \frac{m}{2} = (2a\,C_r - \frac{m^2}{12})^{1/2}$$

Ein Vergleich der Zielfunktionen $\xi_2(T^*)$ und $\xi_2(c_2^*)$ zeigt sofort, daß auch für diesen Fall die Zielfunktion unter der kostenabhängigen Strategie einen geringeren Wert annimmt als unter der laufzeitabhängigen. Daher wird man unter diesen Voraussetzungen den Zeitpunkt für vorbeugende Instandhaltungsmaßnahmen in Abhängigkeit von den Laufzeitkosten festlegen.

Die Vorteile der kostenabhängigen Strategie gegenüber der laufzeitabhängigen wollen wir noch an einem anderen Beispiel aufzeigen, bei dem auch zufällige Ausfälle auftreten.

Wir gehen hierbei von den Werten aus Abschnitt 4.4 aus, d.h. die Anfangskosten V_n seien rechteck-verteilt über $[0,100]$; die Laufzeitkosten sind $g(t)=5\cdot t$,und der Gewinn pro Zeiteinheit beträgt G=200. Die Ausfälle seien exponential-verteilt mit $\lambda=0.5$. Die Stillstandskosten und-zeiten sind gegeben mit:

C_f	C_p	C_r	T_f	T_p	T_r
120	70	10	1.0	0.5	0.1

Wir vergleichen zunächst die Ergebnisse für die Gewinnmaximierung. Der optimale Zeitpunkt für vorbeugende Instand - haltungsmaßnahmen liegt unter der laufzeitabhängigen Strategie bei $T^*=12.9$. Der Wert der Zielfunktion beträgt dann $\xi_1(T^*)=48.4$.

Die optimale Kostengrenze hat den Wert $c^*=58.93$ mit dem Gewinn $\xi_1(c^*)=53.96$. [1] Dies bedeutet gegenüber der laufzeitabhängigen Strategie eine Erhöhung des Gewinns um 11.49%.

Die Zyklenlänge unter c^* beträgt $E(Z_n(c^*))=1.62$, wogegen sie unter T^* fast doppelt so groß ist, nämlich $E(Z_n(T^*))=3.1$. Die Instandhaltung in Abhängigkeit von der Kostengrenze verkürzt somit zwar die Laufzeit der einzelnen Systeme, erhöht aber den pro Zeiteinheit entstehenden Gewinn.

Vergleichen wir die Ergebnisse für die Kostenminimierung, so erhalten wir dort das gleiche Bild. Die vorbeugenden In - standhaltungen werden zum Zeitpunkt $T^*=9.99$ vorgenommen. Die Kosten pro Zeiteinheit betragen $\xi_2(T^*)=124.93$.

Unter der kostenabhängigen Strategie erhalten wir $\xi_2(c^*)=109.96$ für $c^*=49.71$. [2] Die zu erwartende Laufzeit der Anlage be - trägt dabei $E(Z_n(c^*))=0.8$ gegenüber $E(Z_n(T^*))=1.99$. Somit ist die kosten abhängige Strategie auch hier der laufzeitabhängigen überlegen. Die Verringerung der Kosten beträgt 11.98%, was die eventuell zusätzlich anfallenden Kosten für die direkte Erfassung der entstehenden Kosten ausgleichen kann.

1) vgl. Abschnitt 4.4.2

2) vgl. Abschnitt 4.4.3

5. INSTANDHALTUNGSMODELL 2

In diesem Modell soll die Voraussetzung, daß Erneuerung und Justierung immer gleichzeitig geschehen, aufgehoben werden. Daher legen wir eine andere Modellstruktur, die im folgenden näher beschrieben wird und für die in den weiteren Abschnitten die optimalen Strategien bestimmt werden, zu Grunde. [1)]

5.1 MODELLBESCHREIBUNG

(1)[2)] Das System bestehe aus den gleichen 3 Elementgruppen wie das vorige Modell. Hierbei sollen die Gruppen G1 und G2 auch die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Eigenschaften besitzen.

Die Elemente aus Gruppe 3 umfassen zwar auch wieder alle Elemente, die justiert werden müssen; zusätzlich aber auch alle Anlagenteile, die regelmäßig gewartet werden müssen, z.B. durch Reinigen, Schmieren etc. Diese Elemente können somit völlig verschieden sein, ebenso wie auch ihre Justierungen und Wartungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten notwendig sein können, so daß ein einheitlicher Justierungs-und Wartungszeitpunkt wie im Modell 1 nicht existiert.

Die Eigenschaften (2)-(4) seien unverändert gegenüber Abschnitt 4.2.

(5) Bei einem Stillstand der Anlage, der durch einen Ausfall verursacht wurde, wird man zunächst prüfen, ob dieser Ausfall mit einer minimalen Reparatur behoben werden kann oder ob ein Ersatz des gesamten Systems bzw. dessen Generalüberholung erforderlich ist.

---

1) Dieses Modell ist eine Erweiterung zu dem von Cleroux Hanscom[20]behandelten Modell. Wie sich deren Modell aus dem hier behandelten ableiten läßt, siehe unten.

2) Die Systematik entspricht wieder derjenigen aus Abschnitt 4.1.

Nach einem vollständigen Austausch der Anlage gegen eine gleichwertige bzw. nach einer Generalüberholung befinde sich das System wieder in einem neuwertigen Zustand.

Die Zeitpunkte für Justierungen und Wartung der Elemente aus Gruppe 3 seien fest vorgegeben für die Lebensdauer der gesamten Anlage. Nach einer Ersetzung des gesamten Systems bzw. nach dessen Generalüberholung sind die Justierungs - und Wartungszeitpunkte gleich denjenigen der vorigen Anlage.

Ausserdem soll zu jedem Zeitpunkt der Laufzeit die Möglichkeit bestehen, die Anlage stillzulegen und eine vorbeugende Instandhaltungsmaßnahme zu ergreifen, die das System wieder in einen neuwertigen Zustand versetzt.

Die Gesamtlaufzeit des Systems wird durch die Elemente aus Gruppe 2 bestimmt, nach deren Ausfall die Anlage erneuert werden muss. Wir suchen nun auch für dieses System einen optimalen Zeitpunkt für vorbeugende Instandhaltungsmaßnahmen.

Die tatsächliche Laufzeit unter einer zeitabhängigen, periodischen Strategie beträgt dann [1)]

$$LZ_n(T) = \min \{ X_n, T \}.$$

Die Stillstandszeiten, Stillstandskosten und Laufzeitkosten der Elemente aus Gruppe 1 und 2 seien durch die gleichen Größen mit denselben Eigenschaften wie in Abschnitt 4.3 beschrieben.

Die Elemente aus G3 mögen zu den Zeitpunkten ik, $i \in \mathbb{N}$, $k > 0$ fest, Justierungen oder Wartung benötigen. Die dabei entstehenden Kosten $C_{J,n}(ik) > o$ im n-ten Zyklus bei der i-ten

1) vgl. Abschnitt 4.3

Maßnahme seien unabhängige stochastische Variable, die für i fest $(C_{J,n}(ik))_{n \in \mathbb{N}}$ identisch verteilt sind mit endlichem Erwartungswert $C_J(ik), (i \in \mathbb{N})$. Dabei können die Erwartungswerte $C_J(ik)$ für alle i verschiedene Werte annehmen; damit erfaßt man, daß zu den Zeitpunkten ik unterschiedliche Maßnahmen durchgeführt werden, z.B. jede Woche eine grobe Reinigung und einmal monatlich eine gründliche Wartung der Anlage. Die Justierungs-und Wartungskosten sind bezüglich der Laufzeit intervallfixe Kosten.

Entsprechend den unterschiedlichen Kosten benötigt man für die Justierungs-und Wartungsarbeiten auch verschieden lange Zeiten. Sie seien durch die unabhängigen, stochastischen Variablen $T_{J,n}(ik)$ beschrieben, die ebenfalls für festes i identisch verteilt sind mit dem endlichen Erwartungswert $T_J(ik), (i \in \mathbb{N})$.

Die Zahl der während der Laufzeit eines Zyklus notwendig werdenden Justierungs-und Wartungsarbeiten beträgt:

$$N_J(LZ_n(T)) := b(T) - \delta_{b(T) \cdot k;T}$$

wobei $b(T) := \left\lfloor \frac{LZ_n(T)}{k} \right\rfloor$, d.h. die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{LZ_n(T)}{k}$ ist, und $\delta_{i;j}$ ist das Kroneckersymbol, d.h.

$$\delta_{i;j} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die während eines Zyklus durch die Elemente aus G3 verursachten Kosten belaufen sich auf:

$$K_{J,n}(T) = \sum_{i=1}^{N_J(LZ_n(T))} C_{J,n}(ik) .$$

Ist $N_J(LZ_n(T)) = 0$, so sei auch $K_{J,n}(T) = 0$.

Die Kosten $(K_{J,n}(T))_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten zufälligen Größen mit endlichem Erwartungswert $E(K_{J,n}(T)) =: K_J(T) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Entsprechend gilt für die verursachte Stillstandszeit während eines Zyklus:

$$SZ_{J,n}(T) := \sum_{i=1}^{N_J(LZ_n(T))} T_{J,n}(ik),$$

wobei auch $SZ_{J,n}(T) = 0$, falls $N_J(LZ_n(T)) = 0$.

Auch diese Stillstandszeiten sind eine Folge von unabhängigen, identisch-verteilten zufälligen Größen mit endlichem Erwartungswert $SZ_J(T) := E(SZ_{J,n}(T)) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Die gesamten Stillstandskosten eines Zyklus betragen somit:

$$SK_n(T) = N_M(LZ_N(T)) \cdot C_M + I_T(X_n) \cdot \hat{C}_{f,n}(X_n) + \bar{I}_T(X_N) \cdot \hat{C}_{p,n}(T) + K_{J,n}(T)$$

Die Laufzeitkosten setzen sich jetzt zusammen aus den Kosten, die durch die Elemente aus G1 und G2 verursacht werden:

$$LK_n(T) = \int_0^{LZ_n(T)} g(t)\, dt$$

mit $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, so daß die Gesamtkosten eines Zyklus sich belaufen auf: $K_n(T) = LK_n(T) + SK_n(T)$.

Während eines Zyklus beträgt die Stillstandszeit insgesamt:

$$SZ_n(T) = N_M(LZ_n(T)) \cdot T_M + I_T(X_n) \cdot \hat{T}_{f,n}(X_n) + \bar{I}_T(X_n) \cdot \hat{T}_{p,n}(T) + SZ_{J,n}(T),$$

so daß die Zyklenlänge gegeben ist durch:

$$Z_n(T) = LZ_n(T) + SZ_n(T).$$

5.2 MAXIMIERUNG DES ZU ERWARTENDEN GEWINNS PRO BETRIEBSZEITEINHEIT

Der während der Laufzeit entstehende Bruttogewinn ohne Abzug der Laufzeit-und Instandhaltungskosten betrage G. Der entstehende Gewinn bei Abzug der Laufzeit-und Instandhaltungskosten bildet einen kumulativen Prozeß, so daß wir für einen unendlichen Planungshorizont die Zielfunktion erhalten:

$$\xi_1(T) = \frac{E(G_n(T))}{E(Z_n(T))} \longrightarrow \max! \quad (n \in \mathbb{N})$$

wobei $E(G_n(T))$ der zu erwartende Gewinn eines Zyklus ist mit

$$E(G_n(T)) = G \cdot E(LZ_n(T)) - E(K_n(T)).$$

Die Erwartungswerte der Kosten-, Laufzeit- und Stillstandszeitgrößen sind bekannt [1] bis auf die neue Justierungszeit und die zugehörigen Kosten.

Da die zufälligen Größen $T_{J,n}(ik)$ und $N_J(LZ_n(T))$ unabhängig voneinander sind, beträgt die zu erwartende Stillstandszeit für Justierung und Wartung während eines Zyklus:

$$SZ_J(T) = \sum_{j=0}^{\hat{N}_J(T)} \left(\sum_{i=0}^{j} T_J(ik) \right) \cdot P\{ N_J(LZ_n(T)) = j \}$$

mit $\hat{N}_J(T) := \lceil T/k \rceil - \delta_{\lceil T/k \rceil \cdot k;T}$; dies ist die maximale Zahl von Justierungen und Wartungen während eines Zyklus, so daß gilt:

$$N_J(LZ_n(T)) \leq \hat{N}_J(T).$$

Mit Hilfe der Ausfallverteilung F läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß genau j Justierungen und Wartungen während eines Zyklus vorgenommen werden, darstellen durch:

---

1) vgl. Abschnitt 4.4

$P\{N_J(LZ_n(T))=j\} = P\{j\cdot k \leqq LZ_n(T) < (j+1)\cdot k\} = F((j+1)\cdot k) - F(jk)$, falls j kleiner als $\hat{N}_J(T)$ ist; nimmt j den Wert $\hat{N}_J(T)$ an, so gilt:

$$P\{N_J(LZ_n(T))=\hat{N}_J(T)\} = P\{LZ_n(T) \geqq \hat{N}_J(T)k\} = \bar{F}(\hat{N}_J(T)k).$$

Für den Erwartungswert der Justierungskosten erhalten wir somit

$$K_J(T) = \sum_{j=0}^{\hat{N}_J(T)} C_J(j\cdot k)\cdot \bar{F}(j\cdot k)$$

Für eine optimale Strategie gilt dann folgendes:

Lemma 5.2.1: Sind die Funktion g, g_f, g_p, q_f und q_p, sowie die Ausfallverteilung F und die Ausfallrate ϕ_M stetig,[1] so kann die optimale deterministische Strategie T^* nicht durch eine stochastische Strategie T verbessert werden im stationären Fall.

Beweis: Wir werden zunächst zeigen, daß $\xi_1(T)$ für ein deterministisches $T^* \in [o,\infty]$ ein globales Maximum annimmt.

Dazu untersuchen wir die Zielfunktion für $T \in [o,k]$ und $T \in [ik,(i+1)k]$, $i \geqq 1$. Für $T \in [o,k]$ ist die Zielfunktion stetig und nimmt Maximum für $T = x_o$ an; hierbei kann das Maximum auch für ein T auf dem Rand des Intervalls angenommen werden.

Betrachtet man die Zielfunktion für ein beliebiges Intervall $[i\,k,(i+1)\cdot k]$, $i \geqq 1$, so ist die Zielfunktion in diesem Intervall stetig bis auf den linken Randpunkt. Für diesen Punkt gilt jedoch, daß die Zielfunktion für T=i größer oder gleich $\xi_1(i+)$ ist. Denn für den Zähler der Zielfunktion gilt:

---

1) Die Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion, wie sie durch Abschnitt 4.3 angegeben sind, brauchen für dieses Lemma nicht vorausgesetzt werden.

$$E(G_n(i)) \geq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} E(G_n(i+h))$$

und für den Nenner gilt:

$$E(Z_n(i)) \leq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} E(Z_n(i+h)),$$

so daß für die Zielfunktion gilt:

$$\xi_1(i) \geq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \xi_1(i+h).$$

Somit nimmt die Zielfunktion entweder in einem Stetigkeitspunkt bzg. T des Intervalls $[ik, (i+1)k]$ ein Maximum an, oder wir ordnen diesem Intervall das Maximum des vorangehenden Intervalls zu, falls das Maximum für $T \to ik$ angenommen wird.

Somit erhalten wir für jedes Intervall einen Wert $T = x_i$ $(i=0,1,2,\ldots)$,[1] der die Zielfunktion maximiert.

Der Wert x_i muß aber nicht ein Wert aus dem entsprechenden Intervall $[ik,(i+1)k]$ sein, sondern kann auch einem vorangehenden Intervall entnommen sein, so daß die x_i nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Es ist jedoch hiermit sichergestellt, daß ein $T^* \in [o,\infty]$ existiert, das die Zielfunktion maximiert.[2]

Dem Argument von Barlow-Proshan[3] folgend, ist aus der Menge der stochastischen Strategien diejenige optimal, die mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich T^* ist.▲

Die optimale Strategie werden wir somit nur noch unter den deterministischen Strategien suchen. Eine notwendige Bedingung für das Optimum durch Nullsetzen der ersten Ablei-

---

1) i=o entspreche dem Intervall [o,k]

2) globales Maximum

3) vgl. Barlow-Proshan [9] S. 68 f

tung läßt sich hier nicht angeben, da die Zielfunktion Sprungstellen besitzt und das Optimum an diesen Sprung - stellen auftreten kann. Wir werden auch in diesem Modell wieder von der generellen Voraussetzung ausgehen, daß die Zielfunktionen unter der Basisstrategie einen endlichen Wert annehmen. Denn ist dies nicht der Fall, so ist bei den Maximierungsproblemen die Basisstrategie optimal, und bei der Kostenminimierung ist es immer besser, vorbeugend instand - zuhalten als bis zu einem Ausfall zu warten.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen optimalen Strategie, die den Gewinn eines Zyklus maximiert, erhalten wir durch das folgende Lemma:

Lemma 5.2.2: Existiert eine Strategie $T_o < \infty$, so daß für alle vorbeugenden Instandhaltungszeitpunkte $T \geq T_o$ die Grenzkosten der Anlage bzg. T ohne Berücksichtigung der intervallfixen Kosten größer sind als der pro Laufzeiteinheit entstehende Grenzgewinn bzg. T, dann wird der Gewinn eines Zyklus durch eine endliche Strategie T_1^* maximiert. [1)]

Beweis: Der Gewinn unter der Basisstrategie für einen Zyklus betrage G^∞. Eine endliche Strategie T optimiert die Zielfkunktion, wenn der Gewinn unter T größer wird als unter der Basisstrategie, d.h. wenn gilt:

$$G \cdot \int_0^T \bar{F}(t)dt - E(K_n(T)) > G^\infty$$

Diese Bedingung läßt sich jedoch umformen zu

$$(5.2.1) \quad K_J(T) < G \int_0^T \bar{F}(t)dt - E(K_n(T)) - G^\infty + K_J(T).$$

Die rechte Seite der Bedingungsgleichung (5.2.1) konvergiert gegen die zu erwartenden Justierungskosten unter der Basisstrategie. Da die rechte Seite differenzierbar ist, ist sie ab gewissem T_o monoton fallend, falls für alle $T \geq T_o$ gilt:

1) Monotonie und Differenzierbarkeit der Funktionen seien entsprechend den Voraussetzungen in Abschnitt 4.3 erfüllt.

$$G\cdot\bar{F}(T) < g(T)\cdot\bar{F}(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot f(T)+(\hat{g}_p'(T)+C_M\cdot\phi_M(T))\cdot\bar{F}(T)$$

Diese Bedingung ist aber auf Grund unserer Voraussetzungen erfüllt, so daß die Zielfunktion durch eine endliche Strategie optimiert wird.▲

Korollar 5.2.3: Die Voraussetzungen von Lemma 5.2.2 sind erfüllt, wenn folgendes gilt: [1)]

(5.2.3.1) $C_M > 0;\ 0 \leqq C_p < C_f;\quad 0 \leqq g_p(t) \leqq g_f(t)\quad (t\in\mathbb{R}^+)$

(5.2.3.2) ϕ und/oder ϕ_M sind aus (K1)

oder

(5.2.3.2)' $\phi(t)$ und/ $\phi_M(t)$ sind aus (K2), $\bar{F}(t)\neq 0$ für $t\in\mathbb{R}^+$, die Kostenfunktion $g(t)$ übersteigt nach hinreichend langer Laufzeit t_o den entstehenden Gewinn G, d.h. $g(t) > G,\ t \geqq t_o$.

Für die Maximierung des Gewinns einer Periode haben wir somit hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie gefunden. Für die Gewinnmaximierung pro Betriebszeiteinheiten können wir dann folgendes Ergebnis ableiten:

Satz 5.2.4: Sind die Voraussetzungen von Lemma 5.2.2 erfüllt und ist der optimale Periodengewinn $E(G_n(T_1^*))$ positiv und gilt:

(5.2.4.1) $T_M \geqq 0,\ 0 \leqq T_p \leqq T_f,\ 0 \leqq q_p(t) \leqq q_f(t)\quad (t\in\mathbb{R}^+)$,

so existiert für die Zielfunktion $\xi_1(T)$ eine endliche, optimale Strategie T^*.

Beweis: Für den Zähler der Zielfunktion existiert auf Grund von Lemma 5.2.2 eine endliche optimale Strategie. Da der Nenner auf Grund der Voraussetzungen (5.2.4.1) monoton steigend ist, gibt es auch für $\xi_1(T)$ eine endliche, optimale Strategie.▲

---

1) Monotonie und Differenzierbarkeit gelten entsprechend Abschnitt 4.3

Bei der Bestimmung der optimalen Strategie T^* liefert uns Lemma 5.2.2 eine Obergrenze, die T^* nicht überschreitet:

Korollar 5.2.5: Sind die Voraussetzungen des Satzes 5.2.4 erfüllt, so werden die vorbeugenden Instandhaltungen bei der Maximierung des Gewinns pro Betriebszeiteinheit nicht später vorgenommen als bei der Maximierung des Periodengewinns.

Somit bestätigt sich auch an diesem Modell, daß die optimale wirtschaftliche Nutzungsdauer bei unendlich oft wiederholten Investitionen kürzer ist als bei einer einmaligen Investition.

Die zu erwartende Zahl der ausfallbedingten und vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahmen pro Zeiteinheit beträgt unter der optimalen Strategie:

$$N_f(T^*) = \frac{F(T^*)}{E(Z_n(T^*))}$$

$$N_p(T^*) = \frac{\overline{F}(T^*)}{E(Z_n(T^*))}$$

Die Zahl der Justierungen und Wartungen pro Zeiteinheit erhält man ebenfalls mit dem Satz von Smith:

$$N_J(T^*) = \frac{E(N_J(LZ_n(T^*)))}{E(Z_n(T^*))}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{\hat{N}_J(T^*))} \overline{F}(j\,k)}{E(Z_n(T^*))} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

5.3 MINIMIERUNG DER ZU ERWARTENDEN KOSTEN PRO LAUFZEITEINHEIT

Die entstehenden Kosten eines Zyklus bilden einen kumulativen Prozeß, so daß wir als Zielfunktion im stationären Fall erhalten:

$$\xi_2(T) = \frac{E(K_n(T))}{E(LZ_n(T))} \longrightarrow \min!$$

Wir wollen nun auch für diesen Fall nachweisen, daß die Zielfunktion durch eine periodische, deterministische Strategie minimiert wird.

Lemma 5.3.1: Sind die Kostenfunktion g, g_f und g_p, sowie die Ausfallverteilung F und die Ausfallrate ϕ_M stetig, [1] so verbessert eine stochastische Strategie nicht die optimale, deterministische Strategie.

Beweis: Ebenso wie bei Lemma 5.2.1 zeigt man, daß die Zielfunktion ihr Minimum für eine Strategie $T^* \in [0,\infty]$ annimmt, denn für die Kostenfunktion gilt:

$$(5.3.1) \quad \xi_2(i\cdot k) \leq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \xi_2(ik+h) \quad (i \in \mathbb{N})$$

Analog Lemma 5.2.1 läßt sich dann zeigen, daß eine stochastische Strategie den Wert der Zielfunktion unter T^* nicht verbessern kann. ▲

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie liefert der folgende Satz:

Satz 5.3.2: Die Zielfunktion $\xi_2(T)$ wird durch eine endliche Strategie minimiert, falls gilt:

$$(5.3.2.1) \quad C_M > 0, \; 0 \leq C_p < C_f, \; 0 \leq g_p(t) \leq g_f(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

---

1) Differenzierbarkeit der Funktionen wird nicht benötigt.

(5.3.2.2) ϕ und/oder ϕ_M sind aus (K1)

oder

(5.3.2.2)' ϕ und ϕ_M sind aus (K_2) und für g gilt ab hinreichend großem $T_o \in \mathbb{R}^+$, $g(T) > \xi_2^\infty$, $(T \geq T_o)$, wobei ξ_2^∞ der Wert der Zielfunktion unter der Basisisstrategie ist, d.h. die Laufzeitkosten g(t) werden ab T_o größer als die Durchschnittskosten unter der Basisstrategie; außerdem sei $F(T) \neq 1$ für $T=T_o$.

Beweis: Eine endliche Strategie T ist vorteilhafter als die Basisstrategie genau dann, wenn gilt:

$$(5.3.2)\quad \xi_2(T) < \frac{\int_0^\infty g(t)\bar{F}(t)dt + C_M \cdot \int_0^\infty \phi_M(t)\bar{F}(t)dt + C_f + \int_0^\infty g_f(t)dF(t) + \gamma}{\mu}$$

wobei γ die zu erwartenden Justierungs-und Wartungskosten unter der Basisstrategie sind.

Die Bedingung (5.3.2) läßt sich umformen zu:

$$(5.3.3)\quad K_J(T) < \xi_2^\infty \cdot \int_0^T \bar{F}(t)dt - E(K_n(T)) + K_J(T),$$

d.h. die Justierungs-und Wartungskosten unter der Strategie T müssen kleiner sein als die auf die Zyklenlänge $E(LZ_n(T))$ entfallenden anteiligen Kosten unter der Basisstrategie abzüglich der Kosten ohne Justierungs-und Wartungskosten bei der Strategie T.

Die intervallfixen Kosten $K_J(T)$ steigen monoton gegen γ. Die rechte Seite der Ungleichung (5.3.3) strebt ebenfalls gegen γ. Differenzieren wir die rechte Seite von (5.3.3) nach T, so erhalten wir:

$$(5.3.4)\quad \bar{F}(T)\cdot\left(\xi_2^\infty - (g(t) + (\hat{C}_f(T) - \hat{C}_p(T))\cdot\phi(T) + \hat{g}_p''(T) + C_M\cdot\phi_M(T))\right)$$

Die Ungleichung (5.3.3) ist gültig, wenn die rechte Seite ab hinreichend großem T_o monoton fallend gegen γ ist. Dies ist erfüllt, wenn die Ableitung (5.3.4) negativ wird ab T_o. Aufgrund der Voraussetzung (5.2.3.1), (5.2.3.2) bzw. (5.2.3.2)' ergibt sich dies ab hinreichend großem T_o.▲

Diese hinreichenden Bedingungen sichern zwar die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie, geben aber keine Hilfestellung bei der Ermittlung des optimalen T^*. Wird die optimale Strategie für ein T^* aus dem offenen Intervall $(ik,(i+1)\,k)$ angenommen, so ist die Zielfunktion dort differenzierbar, und man erhält als notwendige Bedingung, daß die Elastizität der Kosten bzg. der Laufzeit gleich eins ist, d.h.:

$$g(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot\phi(T)+\hat{g}'_p(T)+C_M\cdot\phi_M(T) = \frac{E(K_n(T))}{\int_0^T \bar{F}(t)dt}$$

Diese Bedingung ist jedoch auch für weitere lokale Optima in den offenen Intervallen $(ik,(i+1)\cdot k)$, $i\in\mathbb{N}$ notwendig. Existiert im offenen Intervall kein Minimum, so wird dieses Minimum an den Randpunkten angenommen, da am linken Rand die Beziehung (5.3.1) gültig ist. Um jetzt das absolute Minimum festzustellen, müßte man für alle Intervalle $[ik,(i+1)\cdot k]$ das Minimum ermitteln, um anschließend T^* zu bestimmen. Da dieses Vorgehen nicht durchführbar ist, möchte man eine "Stoppregel" haben, die sicherstellt, daß ab einem bestimmten Intervall das Minimum nicht mehr angenommen wird.

Bei der Gewinnmaximierung wurde der mögliche Bereich für T^* durch die optimale Strategie für den Periodengewinn nach oben beschränkt. Bei der Kostenminimierung begrenzt die optimale Strategie, die die Kosten eines Zyklus minimiert, T^* nicht nach oben, da die Kosten eines Zyklus unter der Strategie $T = 0$ minimal werden. Für $T \to o$ strebt aber die Zielfunktion $\xi_2(T)$ gegen Unendlich.

Um den Bereich für eine optimale Strategie abgrenzen zu können, spalten wir die Zielfunktion ξ_2 in zwei Funktionen

---

1) vgl. Korollar 5.2.5

ξ_2^1 und ξ_2^2 auf, so daß für alle $T \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\xi_2(T) = \xi_2^1(T) + \xi_2^2(T)$$

Mit der Funktion $\xi_2^1(T)$ erfassen wir alle Kosten außer den Justierungs-und Wartungskosten, d.h.

$$\xi_2^1(T) = \frac{E(\hat{K}_n(T))}{\int_0^T \bar{F}(t)dt}$$

mit $E(\hat{K}_n(T)) = E(K_n(T)) - K_J(T)$. Dieser erste Bestandteil ξ_2^1 der Kostenfunktion ist stetig und differenzierbar, so daß wir für ihn das Minimum mit Hilfe der Ableitung bestimmen können. Die Funktion ξ_2^2 erfasse die Wartungs-und Justierungskosten pro Laufzeiteinheit, d.h.

$$\xi_2^2(T) := \frac{K_J(T)}{\int_0^T \bar{F}(t)dt} .$$

Kosten für Wartung und Justierung entstehen jedoch nur zu den fest vorgegebenen Zeitpunkten i.k, so daß $K_J(T)$ konstant ist für T aus den Intervallen $(i \cdot k, (i+1) \cdot k]$, $i \in \mathbb{N}$. An den Randpunkten $i \cdot k$, $i \in \mathbb{N}$ dieser Intervalle nehmen die Kosten $K_J(T)$ jeweils um $C_J(ik) \cdot F(i \cdot k)$ zu. Da aber der Nenner $\int_0^T \bar{F}(t)dt$ monoton steigend ist, fällt die Kostenfunktion $\xi_2^2(T)$ monoton in den Bereichen $(ik, (i+1) \cdot k]$, $i \in \mathbb{N}$, und nimmt für $T = i \cdot k$, $i \in \mathbb{N}$ ein lokales Minimum an. Diese lokalen Minima der Justierungs- und Wartungskosten jeweils vor der nächsten dieser Maßnahmen ermöglichen es, eine Stoppregel für die Suche des globalen Optimums T^* zu finden. Außerdem werden wir zeigen, daß diese

lokalen Minima unter einigen schwachen Voraussetzungen den möglichen Lösungsbereich T^* auf endlich viele Punkte einengen, so daß die numerische Ermittlung der optimalen Strategie keine Schwierigkeiten bereitet.

Lemma 5.3.3: Gilt zu den Voraussetzungen des Satzes 5.3.2 zusätzlich, daß für die Justierungs-und Wartungskosten ein i_0 existiert mit

$$(5.3.3.1) \qquad \frac{K_J(ik)}{K_J((i-1)\cdot k))} = \frac{F(i\cdot k)}{F((i-1)\cdot k)}$$

für alle $i > i_0$ und echt größer für $i=i_0$, und ist die Ausfallrate ϕ monoton steigend, so hat die Funktion ξ_2^1 ein absolutes Minimum für ein endliches T_1^*, und für die optimale Strategie T^* gilt:

$$T^* \leqq \max \{ T_0, i_0 \cdot k \},$$

wobei für alle $T > T_0$ die Ableitung von ξ_2^1 nicht negativ sein muß.

Beweis: Durch Ableitung der Funktion $\xi_2^1(T)$ nach T erhält man als notwendige Bedingung für eine endliche optimale Strategie

$$(5.3.5) \quad g(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot\phi(T)+g_p'(T)+C_M\,\phi_M(T)= \frac{E(K_n(T))}{\int_0^T \bar{F}(t)dt}$$

Auf Grund der Voraussetzungen aus Satz 5.3.2 existiert mindestens eine Lösung für diese Bedingungsgleichung, die ein Minimum liefert, und die Ableitung ist ab hinreichend großem T_0 positiv. Somit nimmt $\xi_2^1(T)$ in einem endlichen Punkt T_1^* das absolute Minimum an.

Auf Grund der Voraussetzungen sind die Justierungs-und Wartungskosten pro Laufzeit ab i_0 monoton steigend. Denn für $T_1 < T_2$ gilt, daß die zu erwartende Zeit bis zu einem ersten Ausfall unter T_1 nicht kleiner ist als unter T_2, d.h. je früher man vorbeugende Instandhaltungsmaßnahmen durchführt, um so seltener wird ein unvorhergesehener Ausfall eines Elementes aus Gruppe 2 geschehen:[1)]

$$(5.3.6) \qquad \frac{\int_0^{T_1} \bar{F}(t)dt}{F(T_1)} \geqq \frac{\int_0^{T_2} \bar{F}(t)\,dt}{F(T_2)} \quad .$$

Aus der Bedingung (5.3.3.1) folgt nämlich mit (5.3.6)

$$\frac{K_J(ik)}{K_J((i-1)k)} \geqq \frac{\int_0^{i\cdot k} \bar{F}(t)\,dt}{\int_0^{(i-1)k} \bar{F}(t)\,dt}$$

Dies ist jedoch äquivalent dazu, daß die Justierungs- und Wartungskosten pro Zeiteinheit ab i_0 mit wachsendem $i \geqq i_0$ ebenfalls ansteigen. Daraus folgt, daß die insgesamt entstehenden Kosten pro Laufzeiteinheit ab dem Zeitpunkt $\max\{T_0, i_0 \cdot k\}$ monoton steigend sind, so daß $T^* \leqq \max\{T_0, i_0 \cdot k\}$. ▲

Bei der Festlegung der Obergrenze für die optimale Strategie T^* kann die Bestimmung des Zeitpunktes T_0 für die Zielfunktion $\xi_2^1(T)$ wesentlich vereinfacht werden, wenn folgendes gilt:

---

1) vgl. Barlow, Proshan [10], S. 62

Korollar 5.3.4: Zu den Voraussetzungen von Lemma 5.3.3 gelte zusätzlich, daß die Ausfallrate ϕ_M ebenso wie die Differenz der laufzeitabhängigen ausfallbedingten und vorbeugenden Instandhaltungskosten $g_f(t)-g_p(t)$ und die Kostenrate $g_p'(t)$ der vorbeugenden Instandhaltung nicht monoton fallend ist. Die Funktion $\xi_2^1(T)$ nimmt dann ihr absolutes Minimum im ersten lokalen Minimum an und $T_1^* = T_0$.

Beweis: Bei jedem lokalen Minimum muß die notwendige Bedingung (5.3.5) erfüllt sein. Da die Zielfunktion an den Stellen der lokalen Minima den Wert

$$\xi_2^1(T) = g(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\cdot\phi(T)+g_p'(T)+C_M\cdot\phi_M(T)$$

annimmt, gilt auf Grund der Voraussetzungen, daß für zwei lokale Minima $T_1 < T_2$ gilt:

$$\xi_2^1(T_1) \leqq \xi_2^1(T_2).$$

Daher nimmt die Zielfunktion für das kleinste T, welches lokales Minimum ist, auch ihr absolutes Minimum an. Da die 2.Ableitung von $\xi_2^1(T)$ ab T_1^* nicht negativ ist, existieren auch **keine weiteren lokalen Minima, so daß die Funktion $\xi_2^1(T)$ ab T_1^* monoton steigend ist und somit $T_1^* = T_0$ gesetzt werden kann.**

Lemma 5.3.3 und Korollar 5.3.4 ermöglichen es, daß man bei der Berechnung der Strategie T_1^* als Obergrenze für T^* von T=0 startend nur das erste lokale Minimum der stetigen Kostenfunktion $\xi_2^1(T)$ aufsuchen muß. Man ist dann schon sicher, das absolute Minimum für $\xi_2^1(T)$ gefunden zu haben, da keine weiteren lokalen Minima existieren. Die Obergrenze für die optimale Strategie T^* ist somit festgelegt.

Die bisherigen Ergebnisse liefern uns aber nicht nur eine obere Schranke bei der Suche nach der optimalen Strategie, sondern sie zeigen auch auf eine Besonderheit der optimalen Lösung hin. Besitzt nämlich die stetige Kostenfunktion $\xi_2^1(T)$ ihr absolutes

Minimum im ersten lokalen Minimum mit der Strategie T_1^* an, so nimmt die Zielfunktion $\xi_2(T)$ ihre lokalen Minima im Bereich $T \leq T_1^*$ jeweils zu den Wartungszeitpunkten $i \cdot k$ an. Denn sowohl ξ_2^1 als auch ξ_2^2 sind in diesem Bereich monoton fallend mit Ausnahme der Sprungstellen von ξ_2^2 an den Punkten $i \cdot k$. Diese Zeitpunkte bilden jedoch lokale Minima für ξ_2^2 mit $\xi_2^2(ik) \leq \xi_2^2(i \cdot k+)$, so daß auch $\xi_2(T) = \xi_2^1(T) + \xi_2^2(T)$ lokale Minima besitzt, wenn die vorbeugende Instandhaltung für einen der Zeitpunkte $T = i \cdot k < T^*$ geplant wird.

Eine noch genauere Beschreibung der Lage des Minimums erhalten wir aus folgendem Satz:

Satz 5.3.5: Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Korollar 5.3.4 gegeben. Dann existiert mindestens ein lokales Minimum für die Zielfunktion $\xi_2(T)$ in einem offenen Intervall $(ik,(i+1) \cdot k)$ und T_o^* sei der erste Zeitpunkt, für den die Zielfunktion ein derartiges lokales Minimum annimmt.

Für die optimale Strategie gilt:

$$T^* \in \{T_o^*,\ i \cdot k;\ i=1,2,\ldots,\ v_o\}$$

mit $v_o := \max \{ i_o,\ [T_o^*/k] \}$.

Beweis: Nimmt $\xi_2(T)$ ein lokales Minimum im Innern eines Intervalls an, so ist die Zielfunktion dort differenzierbar, und wir erhalten als notwendige Bedingung:

$$L(T) = K_J(T) \tag{5.3.7}$$

mit $$L(T) := \left| g(T) + (\hat{C}_f(T) - \hat{C}_p(T)) \cdot \phi(T) + g_p'(T) + C_M \cdot \phi_M(T) \right| \cdot \int_0^T \bar{F}(t)\,dt$$

$$- E(\hat{K}_n(T)).$$

Betrachten wir die Relation der Größen $L(T)$ und $K_J(T)$ zueinander für den Grenzübergang $T \to \infty$ und für hinreichend kleines T_1 mit $o < T_1 < k$, so gilt:

$$\lim_{T\to\infty} L(T) \quad > \quad \lim_{T\to\infty} K_J(T) =: \gamma$$

$$L(T_1) \quad < \quad K_J(T_1) = 0$$

Auf Grund dieser Beziehungen existiert ein T_o, $0 < T_o < \infty$, so daß in einer geeigneten ϵ-Umgebung $U_\epsilon(T_o)$ gilt:

(5.3.8) $\quad L(T) \leqq K_J(T) \qquad$ für $T < T_o$, $T \in U_\epsilon(T_o)$

(5.3.9) $\quad L(T) \geqq K_J(T) \qquad$ für $T > T_o$, $T \in U_\epsilon(T_o)$

Strebt nun T gegen T_o, so erhält man aus (5.4.8) und (5.3.9):

$$L(T_o)=L(T_o-) \leqq K_J(T_o-)=K_J(T_o) \leqq K_J(T_o+) \leqq L(T_o+)=L(T_o).$$

Hieraus folgt die Gleichheit aller Terme, so daß T_o ein Stetigkeitspunkt der intervallfixen Kosten $K_J(T)$ ist und die Zielfunktion in T_o ein lokales Minimum hat.

Auf Grund der Bedingungsgleichung (5.3.7) nimmt die Zielfunktion $\xi_2(T)$ in den lokalen Minima in den offenen Intervallen $(ik,(i+1)\cdot k)$, $i \in \mathbb{N}$, den Wert an:

$$\xi_2(T)=g(T)+(\hat{C}_f(T)-\hat{C}_p(T))\,\phi(T)+ g_p'(T)+C_M\,\phi_M(T)$$

Die Voraussetzungen des Satzes gewährleisten jedoch, daß bei mehreren lokalen Minima die Zielfunktion von Minimum zu Minimum nicht kleiner wird, d.h. aus $T_i < T_j$ folgt $\xi_2(T_i) < \xi(T_j)$, wenn T_i, T_j Strategien mit lokalem Minimum. Daher wird das absolute Minimum, falls es nicht in einem Randpunkt eines Intervalls angenommen wird, beim ersten lokalen Minimum T_o^* in einem offenen Intervall erreicht.

Wird die Zielfunktion minimal für $T^* = ik$ $(i \in \mathbb{N})$, d.h. an einer Sprungstelle, so ist auf Grund von Lemma 5.3.3

$$T^* \leqq v_1 \cdot k,$$

mit $v_1 := \max\{i_0, [T_1^*/k]\}$ und T_1^* ist das absolute Minimum von $\xi_2^1(T)$.[1] Das Korollar 5.3.4 gibt uns die Möglichkeit, uns auf das erste lokale Minimum von $\xi_2^1(T)$ zu beschränken. Vergleicht man die Bedingungsgleichungen (5.3.5) und (5.3.7) für T_1^* bzw. T_0^*, so erhalten wir daraus, daß T_1^* kleiner oder gleich T_0^* ist, so daß $[T_1^*/k] \leq [T_0^*/k]$ und somit $v_1 \leq v_0$. ▲

Dieser Satz ermöglicht es, die optimale Strategie vollständig in ihrer Struktur zu erfassen. Lemma 5.3.3 und Korollar 5.3.4 ließen zunächst nur in dem Bereich $T \leq T_1^*$ die Besonderheiten der fest vorgegebenen Justierungs-und Wartungszeitpunkte für die Lösung erkennen. Im Satz 5.3.5 gelang es nun, die Zeitpunkte, die für eine optimale, vorbeugende Instandhaltung in Betracht zu ziehen sind, auf endlich viele Punkte einzugrenzen. Die vorbeugende Instandhaltungsmaßnahme kann die Kosten nur dann minimieren, wenn sie entweder zum Zeitpunkt des ersten lokalen Minimums in einem offenen Intervall, d.h. bei $T=T_0^*$ durchgeführt wird oder zu einem der Justierungs-und Wartungszeitpunkte $i \cdot k$, $i=1,2,..,v_0$. Die übrigen lokalen Minima in den offenen Intervallen $(i \cdot k,(i+1) \cdot k)$, $i \in \mathbb{N}$ können wir unberücksichtigt lassen, da die Zielfunktion in ihnen keine besseren Werte als in T_0^* annimmt.[2] Zu den Justierungszeitpunkten $i \cdot k$ mit $i > v_0$ kann die Zielfunktion ebenfalls nicht ihr globales Minimum erreichen, da dort die stetige Kostenfunktion $\xi_2^1(T)$ monoton steigend ist und die Werte des zweiten Summanden $\xi_2^2(T)$ der Zielfunktion größer als zum Zeitpunkt $T=v_0 \cdot k$ werden.

Bei der Berechnung des globalen Optimums bestimmt man also zunächst die Strategie T_0^*, für welche die Zielfunktion in einem offenen Intervall ein lokales Minimum annimmt. Anschliessend berechnet man die Werte der Zielfunktion für $T=i \cdot k$, $i=1,2,\ldots, v_0$ und sucht dann aus den Funktionswerten das globale Minimum. Somit ist die optimale Strategie T^* bestimmt. In dieser Reihenfolge ist auch die Lösung des unten dargestellten Beispiels (vgl. Abb.8) errechnet worden.

---

1) vgl. Lemma 5.3.3
2) vgl. Beweis zu Satz 5.3.5

Berücksichtigt man die minimalen Reparaturen nicht, so wird das Minimum der Funktion $\xi_2^{f1}(T)$ unter den Voraussetzungen des Korollars 5.3.4 durch eine Strategie T_1^* erreicht, die die vorbeugenden Maßnahmen zum gleichen bzw. zu einem späteren Zeitpunkt durchführt als bei Einbeziehung der Elemente aus G1. Denn durch die Elemente, die der minimalen Reparatur unterliegen, entstehen mit wachsendem T monoton steigende Kosten pro Laufzeiteinheit, da

$$(g_1(T)+C_M\cdot\phi_M(T))\cdot\int_0^T \overline{F}(t)dt - \int_0^T g_1(t)\,\overline{F}(t)dt - C_M\cdot\int_0^T \phi_M(t)\overline{F}(t)dt$$

nichtnegativ ist für alle Strategien $T\in\mathbb{R}^+$.[1)]

Ist die Kostenfunktion $g_1(t)$ und/oder die Ausfallrate $\phi_M(t)$ streng monoton steigend, so wird das erste lokale Minimum in einem offenen Intervall auf jeden Fall früher angenommen, wenn die minimalen Reparaturen berücksichtigt werden. In dem vereinfachten Modell gibt es daher für T^* weitere mögliche Lösungen, wenn $i_o < [T_o^*/k]$ ist.

Vereinfacht man das Modell noch weiter, indem man die während der Laufzeit entstehenden Kosten in G2 und die laufzeitabhängigen Instandhaltungskosten vernachlässigt und die Kosten $C_{f,n}, C_{p,n}$ und $C_{J,n}(ik)$, $i\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ als deterministische Größen auffaßt, dann übertragen sich die hier erzielten Ergebnisse auf das von Cleroux und Hanscom[2)] diskutierte Modell und liefern hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen, optimalen Strategie.

1) vgl. Abschnitt 4.3.2
2) vgl. Cleroux, Hanscom [20]

Um das Verhalten der Zielfunktion und die Lage der optimalen Lösung deutlich zu machen, nehmen wir an, daß die Ausfallverteilung gamma-verteilt ist mit $\alpha = 9$, $\lambda = 1$.[1] Jeweils im Abstand k=1 sollen Justierungen durchgeführt werden. Die Justierungskosten mögen um 2% von Justierung zu Justierung geringer werden, da das Personal durch einen Lerneffekt dies schneller durchführen kann von mal zu mal. Die Kosten der ersten Justierung seien 50. Die Kosten der vorbeugenden Instandhaltung seien 100,und der ausfallbedingte Ersatz verursache Kosten in Höhe von 1100. Das Optimum im Innern eines Intervalls (k,k+1) wird im Punkt $T_0^* = 5.193$ angenommen. Dies stellt jedoch nicht das absolute Minimum dar, sondern dies wird für $T^* = 4$ erreicht. Die Kosten pro Laufzeiteinheit betragen dann $\xi_2(T^*) = 67.253$.

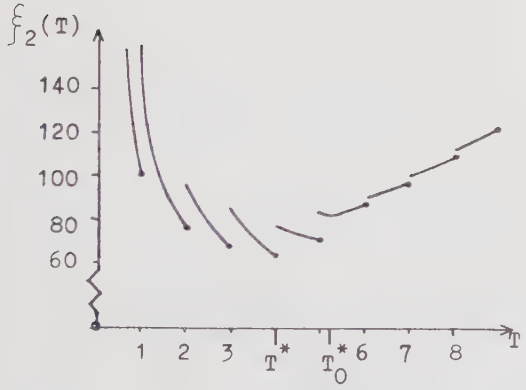


Abb. 8 Zielfunktion Kostenminimierung

1) vgl. Cleroux , Hanscom[20], S. 238 f

Aus der Abbildung 8 entnimmt man, daß auch für diesen Fall sich eine Abweichung von der optimalen Strategie T^* für $T > T^*$ nicht so stark auf die Zielfunktion auswirkt, wie bei $T < T^*$. Daher wird man bei Unkenntnis über die optimale Strategie lieber mit einem späteren Zeitpunkt für die vorbeugenden Maßnahmen beginnen, um sich anschließend der optimalen Strategie anzupassen.

5.4 MAXIMIERUNG DES ZU ERWARTENDEN NUTZUNGSGRADES

Auch der Nutzungsgrad bildet einen kumulativen Prozeß, so daß wir uns im stationären Fall auf die Optimierung für einen Zyklus beschränken können. Die Zielfunktion lautet

$$\xi_3(T) := \frac{E(LZ_n(T))}{E(LZ_n(T)) + E(SZ_n(T))} \rightarrow \max!$$

Ebenso wie in den letzten Abschnitten zeigt man auch für dieses Optimierungsproblem, daß die optimale, periodische, deterministische Strategie im Falle stetiger Funktionen nicht durch eine stochastische, sequentielle verbessert werden kann.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, daß $0 < \xi_3(T) < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$. Äquivalent zu dem Maximierungsproblem ist dann die Minimierung des Quotienten: Stillstandszeit dividiert durch Laufzeit:

$$\hat{\xi}_3(T) := \frac{E(SZ_n(T))}{E(LZ_n(T))} \rightarrow \min!$$

Satz 5.4.1: Die Zielfunktion $\hat{\xi}_3(T)$ und damit auch $\xi_3(T)$ wird durch eine endliche Strategie T^* optimiert, falls gilt:

(5.4.1.1) $T_M > 0$, $0 < T_p < T_f$, $0 \leq q_p(t) \leq q_f(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$

(5.4.1.2) ϕ und/oder ϕ_M sind aus (K1).

Beweis: Eine endliche Strategie T vergößert den Nutzungsgrad gegenüber der Basisstrategie, wenn

(5.4.1) $$SZ_J(T) < \hat{\xi}_3^{\infty} \cdot \int_0^T \bar{F}(t)dt - E(SZ_n(T)) + SZ_J(T).$$

Dies ist nur eine Umformung der Bedingung

$$\hat{\xi}_3(T) \quad < \quad \lim_{T\to\infty} \xi_3(T) := \hat{\xi}_3^{\infty} .$$

Analog zu Satz 5.3.2 zeigt man, daß die linke Seite von (5.4.1) monoton steigt gegen $\lim_{T\to\infty} SZ_J(T)$ und die rechte Seite monoton fällt gegen den gleichen Grenzwert, so daß eine endliche optimale Strategie existiert.

Um den Bereich für die optimale Lösung weiter einzugrenzen, spalten wir die Zielfunktion auf in

$$\hat{\xi}_3^{1}(T) := \frac{E(\hat{SZ}_n(T))}{E(LZ_n(T))}$$

und

$$\hat{\xi}_3^{2}(T) := \frac{SZ_J(T)}{E(LZ_n(T))}$$

mit $E(\hat{SZ}_n(T)) = E(SZ_n(T)) - SZ_J(T)$.

Die Stoppregeln des vorigen Abschnitts übertragen sich dann analog auf die Nutzungsgradmaximierung, wenn man die Größen entsprechend ersetzt. Daher seien die folgenden Ergebnisse ohne Beweis hintereinandergestellt:

Lemma 5.4.2: Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 5.4.1 gebe es ein i_o mit

$$\frac{SZ_J(ik)}{SZ_J((i-1)\cdot k)} \quad \geqq \quad \frac{F(i\cdot k)}{F((i-1)\cdot k)}$$

für alle $i > i_o$ und echt größer für $i=i_o$, so gilt für die optimale Strategie T^*:

$$T^* \leqq \max \left\{ T_o \, , \, i_o \cdot k \right\} \quad ,$$

wobei für $T > T_0$ die Ableitung von $\hat{\xi}_3^1(T)$ nicht negativ sein muß.

Satz 5.4.3: Ist die Differenz der laufzeitabhängigen ausfallbedingten und vorbeugenden Instandhaltungszeiten $q_f(t) - q_p(t)$ und $\hat{q}_p'(t)$ nicht monoton fallend und sind die Voraussetzungen von Lemma 5.4.2 erfüllt, so besitzt die Zielfunktion $\hat{\xi}_3(T)$ in einem offenen Intervall $(ik,(i+1)\cdot k)$, $i \in \mathbb{N}$ ein lokales Minimum. Das absolute Minimum T^* ist dann ein Element aus der Menge:

$$T^* \in \{ T_o^*, \; i \cdot k; \; i=1,2,\ldots v_0 \}$$

mit $v_o := \max \{ i_o, \; [T_o^* / k] \}$; T_o^* ist die kleinste Strategie, für die ein lokales Minimum in einem offenen Intervall $(ik,(i+1)\cdot k)$, $i \in \mathbb{N}$ von $\hat{\xi}_3$ angenommen wird.

Ebenso wie bei der Kostenminimierung sind auch hier die Strategien von besonderer Bedeutung, welche die vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahmen auf einen geplanten Justierungspunkt $i \cdot k$, $i \in \mathbb{N}$ legen. Denn die Zeit $SZ_J(T)$, die für die Justierung und Wartung aufgewendet werden muß, erreicht im Verhältnis zur Laufzeit jeweils bei $i \cdot k$ ein lokales Minimum. [1)]

Auf Grund des Satzes 5.4.3 wird man nun die optimale Strategie so bestimmen, daß man zunächst den Zeitpunkt T_0^* für eine optimale vorbeugende Maßnahme berechnet, bei dem die Zielfunktion in einem offenen Intervall $(ik,(i+1)\cdot k)$ ein lokales Minimum annimmt. Anschließend berechnet man die Zielfunktionswerte für die Strategien, bei denen der vorbeugende Ersatz zum Zeitpunkt $i \cdot k$, $i=1,2,\ldots,v_0$ einer Wartungsmaßnahme durchgeführt wird. Aus diesen (v_o+1) Zielfunktionswerten sucht man das globale Optimum und hat damit die optimale Strategie T^* bestimmt.

Die hier aufgezeigte Lösungsstruktur stimmt mit der des vorigen Abschnitts überein, so daß das dort angegebene Beispiel auch für diesen Fall gilt, indem man die Kostengrößen jetzt als entsprechende Zeiten für die Instandhaltungsmaßnahmen interpretiert.

1) Dies ist die gleiche Situation wie bei den Kosten!

6. VERGLEICH DER BEIDEN INSTANDHALTUNGSMODELLE

Beide diskutierten Modelle gehen von der gleichen Grundstruktur des Instandhaltungsproblems aus; denn die Instandhaltungsmaß - nahmen, die zur Aufrechterhaltung der Produktionsbereitschaft notwendig sind, lassen sich in drei Gruppen von Aktionen ein - teilen:

G1: minimale Reparatur
G2: vollständiger Ersatz
G3: Wartung und Justierung [1)]

Im Instandhaltungsmodell 1 hat die Justierung einen direkten Einfluß auf die entstehenden Laufzeitkosten über die stoch - astischen Anfangskosten V_n und die Kostenfunktion g_3. Die Justierung der Anlage geschieht dabei jeweils bei einem Ersatz des Aggregats bzw. eines Teilaggregats und kann während der Laufzeit der Anlage nicht mehr verändert werden, da z.B. das neue Aggregat einbetoniert wird oder neue Teile festgeschweißt werden, so daß eine Nachjustierung zu vertretbaren Kosten ausgeschlossen ist. Ebenso wirkt die Anfangsqualität der Aggregate über die Startkosten V_n auf die Laufzeitkosten ein.

Im Instandhaltungsmodell 2 liegt der Schwerpunkt der entstehenden Kosten nicht auf der unterschiedlichen Teilequalität oder der Genauigkeit der Justierung, sondern vielmehr auf den Stillstandskosten, die durch die regelmäßigen Produktionsunterbrechungen zu Wartungs-und Justierungszwecken notwendig sind. Dabei können die Wartungen und Justierungen Empfehlungen des Herstellers, aber auch durch Gesetze und Verordnungen festgelegt sein. Daher werden die zu festen Zeitpunkten entstehenden Wartungs-und Justierungskosten mit in das Modell einbezogen, wogegen man dem direkten

---

1) Wartung und Justierung werden nicht als getrennte Gruppen in den hier betrachteten Modellen aufgefaßt, da es sich bei beide um regelmäßig wiederkehrende Arbeiten handelt, welche dieFunktionsfähigkeit des Systems erhalten sollen.

Einfluß der Elemtene aus Gruppe 3 auf die Laufzeitkosten keine Beachtung schenkt.

Die Kostenstruktur, die durch die Elemente aus Gruppe 3 verursacht wird, ist somit in beiden Modellen verschieden, so daß sich weder Modell 1 als Spezialfall von Modell 2 auffassen läßt noch umgekehrt.

Befinden sich aber in der Instandhaltungsgruppe 3 keine Elemente bei beiden Modellen, so führen beide zu der gleichen optimalen Strategie. Denn in Modell 1 sind kosten-und laufzeitabhängige Strategie identisch, da die Startkosten V_n identisch Null sind. Die Strategie des Modells 2 stimmt mit der laufzeitabhängigen Strategie des Modells 1 überein, da beide Modelle durch die Gruppe 1 und 2 die gleiche Kostenstruktur erzeugen. Die beiden Instandhaltungsmodelle unterscheiden sich also durch die unterschiedliche Kostenstruktur, welche die Elemente aus G3 verursachen.

Versucht man die Kostenstruktur der Elemente aus Gruppe 3 aus Modell 1 auf die Teile aus G3 im Modell 2 zu übertragen, indem man auch dort zusätzlich einen direkten Einfluß der Justierungs- und Wartungsarbeiten auf die Laufzeitkosten berücksichtigt, so lassen sich keine allgemeingültigen Aussagen über die optimale Strategie mehr ableiten. Optimale Strategien können jedoch bei gegebenen Daten mit Hilfe von Simulationsmodellen ermittelt werden.

Dies liegt jedoch außerhalb der Zielsetzung dieser Arbeit, da man dann nur Lösungen für die einzelnen, speziellen Fälle erhält, ohne allgemeingültige Aussagen über die Lösungsstruktur und die notwendigen oder hinreichenden Bedingungen für die optimale Strategien diskutieren zu können.

7. ZUSAMMENFASSUNG

Ausgehend von den Ursachen für Instandhaltungsmaßnahmen werden deren Auswirkungen auf das Betriebsgeschehen dargestellt. Anschließend werden die Maßnahmen zur Erfassung und Behebung von Leistungsminderungen erläutert.

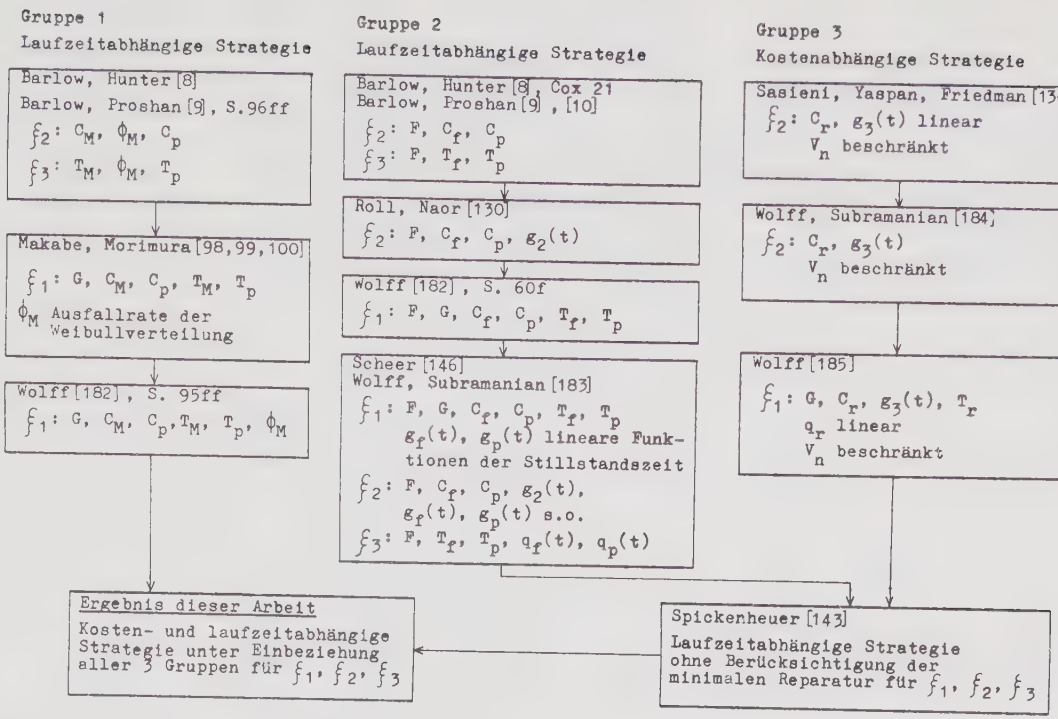
Es fügt sich eine Untersuchung über die Bedeutung der in der Literatur behandelten Zielfunktionen für die Planung vorbeugender betrieblicher Instandhaltung an. Dabei zeigt es sich, daß wir uns im wesentlichen auf drei Zielfunktionen in der weiteren Diskussion beschränken können:

(1) Gewinnmaximierung pro Betriebszeiteinheit
(2) Kostenminimierung pro Laufzeiteinheit
(3) Nutzungsgradmaximierung

Auf der Grundlage stochastisch, rekurrenter Prozesse wird dann ein Instandhaltungsmodell entwickelt, das die bisher isoliert behandelten Probleme - Erneuerung, Justierung und minimale Reparatur - in eine gemeinsame Formulierung integriert. Hierbei wird eine allgemeine Kostenstruktur zu Grunde gelegt, die es erlaubt, verschiedene Kosteneinflußfaktoren zu berücksichtigen, wie die Länge der Reparaturzeit, die vorherige Nutzungsdauer, fixe und zeitproportionale Kosten etc. Dadurch wird es möglich, auch komplexere Instandhaltungssysteme zu optimieren. Denn es werden für die optimale vorbeugende Instandhaltungsstrategie notwendige, aber auch hinreichende Bedingungen der Existenz abgeleitet, so daß man mit bekannten Algorithmen dieses Optimum bestimmen kann.

Für dieses Modell wird anschließend eine neue Strategie vorgeschlagen, die sich nicht an der Laufzeit des Systems orientiert, sondern den Zeitpunkt für eine vorbeugende Instandhaltungsmaßnahme in Abhängigkeit von den während der Nutzungszeit entstehenden Kosten festlegt.

Tabelle 9


Gruppe 1
Laufzeitabhängige Strategie
Barlow, Hunter [8]
Barlow, Proshan [9], S.96ff
f_2: C_M, ϕ_M, C_p
f_3: T_M, ϕ_M, T_p
Makabe, Morimura [98,99,100]
f_1: G, C_M, C_p, T_M, T_p
ϕ_M Ausfallrate der Weibullverteilung
Wolff [182], S. 95ff
f_1: G, C_M, C_p, T_M, T_p, ϕ_M
Gruppe 2
Laufzeitabhängige Strategie
Barlow, Hunter [8], Cox 21
Barlow, Proshan [9], [10]
f_2: F, C_f, C_p
f_3: F, T_f, T_p
Roll, Naor [130]
f_2: F, C_f, C_p, $g_2(t)$
Wolff [182], S. 60f
f_1: F, G, C_f, C_p, T_f, T_p
Scheer [146]
Wolff, Subramanian [183]
f_1: F, G, C_f, C_p, T_f, T_p
$g_f(t)$, $g_p(t)$ lineare Funktionen der Stillstandszeit
f_2: F, C_f, C_p, $g_2(t)$,
$g_f(t)$, $g_p(t)$ s.o.
f_3: F, T_f, T_p, $q_f(t)$, $q_p(t)$
Gruppe 3
Kostenabhängige Strategie
Sasieni, Yaspan, Friedman [136]
f_2: C_r, $g_3(t)$ linear
V_n beschränkt
Wolff, Subramanian [184]
f_2: C_r, $g_3(t)$
V_n beschränkt
Wolff [185]
f_1: G, C_r, $g_3(t)$, T_r
q_r linear
V_n beschränkt
Ergebnis dieser Arbeit
Kosten- und laufzeitabhängige Strategie unter Einbeziehung aller 3 Gruppen für f_1, f_2, f_3
Spickenheuer [143]
Laufzeitabhängige Strategie ohne Berücksichtigung der minimalen Reparatur für f_1, f_2, f_3

Für einen bestimmten Modelltyp wird dann gezeigt, daß die Festlegung des vorbeugenden Instandhaltungszeitpunktes in Abhängigkeit von einer Kostengrenze der vorher diskutierten laufzeitabhängigen Strategie überlegen ist.

Für eine konstante Ausfallrate werden an einigen Beispielen ebenfalls die Vorteile der kostenabhängigen Instandhaltungsplanung dargelegt.

Die Zusammenhänge des hier entwickelten Ansatzes mit den in der Literatur behandelten Problemstellungen zeigt Tabelle 9 auf. Die hinter den Zielfunktionen nicht aufgeführten Größen sind in dem hier dargestellten Modell identisch Null zu setzen, um die Ergebnisse jener Arbeiten zu erhalten.

Beim Instandhaltungsmodell 2 werden die Justierungen nicht nur bei einem Ersatz des Systems durchgeführt, sondern in konstanten Zeitabständen werden Justierungs- und Wartungsarbeiten notwendig. Es werden ebenfalls Bedingungen für die Existenz einer optimalen, vorbeugenden Strategie abgeleitet. Hierbei gelangt man jedoch zu dem Ergebnis, daß man die optimale Strategie nur aus endlich vielen Strategien auswählen muß. Die Zeitpunkte der regelmäßigen Wartungs- und Justierungsmaßnahmen sind dabei für die optimale Strategie von besonderer Bedeutung, da in ihnen die Zielfunktionen ein lokales Minimum besitzen.

Anschließend werden in Abschnitt 6 die wesentlichen Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Instandhaltungsmodelle erläutert.

LITERATURVERZEICHNIS

Verwendete Abkürzungen:

AIIE	American Institute of Industrial Engineering
AMS	Annals of Mathematical Statistics
INFOR	Canadian Journal of Operational Research and Information Processing
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
JASA	Journal of the American Statistical Association
JORSJ	Journal of the Operations Research Society of Japan
MS	Management Science
NRLQ	Naval Research Logistic Quaterly
OR	Operations Research
ORQ	Operations Research Quaterly
RAIRO	Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Operationelle
SIAM	Society for Industrial and Applied Mathematics
ZfB	Zeitschrift für Betriebswirtschaft
ZfhF	Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung
ZfOR	Zeitschrift für Operations Research

1 Abbot, W.R., Repair Versus Replacement of Failed Components, Journ. Ind.Eng. 19(1968), S. 21ff

2 Åkermann, G., Realkapital und Kapitalzins, Heft 1 u. 2, Stockholm 1923/24

3 Albach,H., Zur Verbindung von Produktionstheorie und Investitionstheorie, in: Koch,H.(Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S.137-201

4 Antelman, G.; Savage,I.R.,Surveillance Problems: Wiener Process, NRLQ 12(1965), S.35-55

5 Arbeitskreis Instandhaltung der Schmalenbach-Gesellschaft Köln, Instandhaltung - Ein Management Problem- Foschungsberichte des Landes NRW, Nr. 2383,Opladen 1974

6 Arora, S.R., Lele,P.T., A Note on Optimal Maintenance and Sale Date of a Machine, MS 17(1970),S. 170-173

7 Arrow,K.I., Karlin,S., Scarf,H.(Hrsg.), Studies in Applied Probability and Management Science, Standford 1962

8 Barlow,R.E., Hunter,L., Optimum Preventive Maintenance Policies, OR 8(1960), S. 90-100

9 Barlow,R.E., Proshan,F., Planned Replacement, in: Arrow-Karlin-Scarf [7] , S. 63-87

10 Barlow,R.E., Proshan,F., Mathematical Theory of Reliability, Wiley, New York 1965

11 Barnett,V., Economic Choise of Sample Size for Sampling Inspection Plans, Appl. Statist. 23 (1974), S. 149-157

12 Bensoussan,A., Hurst,E.G.JR., Näslund,B., Management Applications of Modern Control Theory, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam-Oxford 1974

13 Brown,D.B., Martz, Jr., H.F., A Two-Phase Algorithm for the Maintenance of a Deteriorating Component System, AIIE Transactions, Ind. Eng. Res. and Devel. 2 (1970), S. 106ff

14 Bürk,G., Statistische Gesetzmäßigkeiten von Ausfallzeiten und Arbeitsintervallen an Fertigungsmaschinen-Eine Feldstudie, in: Bussmann, K.F., Mertens,P., [15] , S. 17-30

15 Bussmann,K.F., Mertens,P.(Hrsg.), Operations Research und Datenverarbeitung bei der Instandhaltungsplanung, Stuttgart 1968

16 Bussmann,K.F., Kress,H., Kuhn,M., Übersicht über die Strategien und deren Anwendung auf Fertingungsaggregate, in: Bussmann,K.F., Mertens,P. [15] , S.31-40

17 Chamberlain,R., Spare Parts of Machines: which ones and how many, Product Engineering 37 (1966), S. 47-49

18 Cherna,J.C., Minimale Kosten durch planmäßigen Unterhalt, Ind.Org. 43 (1974), S. 350-352

19 Cinlar,E., Markov Renewal Theory, Adv.Appl. Prob.1 (1969), S. 123-187

20 Cleroux, R., Hanscom,M., Age Replacement with Adjustment and Depreciation Costs and Interest Charges,Technome - trics, 16(1974), S. 235-239

21 Cox, D.R., Renewal Theory, Methuen, London 1962

22 Cox, D.R., Smith,W.L., On the Superposition of Renewal Processes,Biometrica 41 (1954), S.91-99

23 Crookes, P.C.I., Replacement Strategies, ORQ 14(1963), S. 167-184

24 Dahmen, U., Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagen unter Berücksichtigung von Instandhaltungsmaßnahmen, Meisenheim/Glan 1975

25 Das Refa-Buch, Bd.2, 6.Aufl. München 1967

26 Di Veroli, J.C., Optimal Continuous Policies for Repair and Replacement, ORQ 25 (1974), S. 89-97

27 Deutsches Komitee Instandhaltung(Hrsg), Instandhaltung-Partner der Produktion,Stuttgart 1973

28 Di Veroli, J.C., Combined Models for Repair and Replacement,Ph. D. Thesis, Imperial College, University of London 1971

29 Doob, J.L., Renewal Theory from the Point of View of the Theory of Probablity, Trans. Am. Math. Soc. 63 (1948), S. 422-438

30 Doob, J.L., Stochastic Processes, New York-London 1953

31 Dreger, W., Systemzuverlässigkeit und Soll- Leistungen, Ind. Org. 43 (1974),S. 455

32 Drenik, R.F., The Failure Law of a Complex Equipment Siam 8 (1960),S. 680-690

33 Drexler, A.I., Zuverlässigkeit von elektronischen System unter besonderer Berücksichtigung von Flugzeugradargeräten, Dissertation, Bonn 1974

34 Feller, W., Fluctuation Theory of Recurrent Events,Trans. Am. Math. Soc. 67 (1949), S. 98-119

35 Feller, W., On the Integral Equation of Renewal Theory, AMS 12 (1941),S. 243-267

36 Feller, W., Zur Theorie der stochastischen Prozesse,Math. Ann. 113 (1936), S. 113-160

37 Fletcher, R.; Powell, M.I.D., A Rapidly Convergent Descent Method for Mimimization, Computer Journal 6(1963),S.163-168

38 Fletcher, R., Reeves, C.M., Function Mimimization by Conjugate Gradients,Computer Journal 7 (1964), S.149-154

39 Friedrich, L., Wedde, G., Erhöhung der Instandhaltungs - effektivität der Grundfonds, Statistische Praxis 1971, Heft 11, S. 594ff

40 Geenen, H., Zur Bestimmung des optimalen Ersatzzeitpunktes von Anlagen bei einwertigen Erwartungen, Diss.Gießen 1969

41 Gehlert, G., Die Ersatzoptimierung von Personenkraft - wagen, Diss. Münster 1970

42 Gertsbakh ,I.B.; Kordonskiy, K.B., Models of Failure, Berlin-Heidelberg-New York 1969

43 Giesbert, H., Erfassung und Überwachung der Instandhaltungskosten, München 1969

44 Gilmore,H.L.,Schwartz,H.C., Integrated Product Testing and Evaluation,Wiley, New York 1969

45 Glasser, G.J., The Age Replacement Problem,Technometrics 9 (1967), S. 83-91

46 Gnedenko,B.W., Beljajew,J.K., Solowjew,A.D., Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie, Bd.I u. II, Berlin 1968

47 Götzfried, F., Disposition des Material-und Verschleißteilevorrates für die Instandhaltung, Sonderdruck aus VDI-Bildungswerk Instandhaltung 1965

48 Gopalan, M.N., D'Souza,C.A., Probabilistic Analysis of a Two-Unit System with a Single Service Facility for Preventive Maintenance and Repair,OR 23(1975), S.173-177

49 Graef,M., Schubring,G., Betrachtung der langfristigen Rechnernutzung, Angew. Informatik 17 (1975), Heft 6,S. 233-236

50 Grinyer,P.H., Toole,D.G., A Note on the Theory of Replacement,INFOR 10 (1972) S. 107-128

51 Grothus,H., Die Bauteilanalyse als Hilfsmittel für die Instandhaltungsorganisation, Produktion 2 (1963), S. 34-36

52 Grothus,H., Die Erfassung von Schwachstellen an Maschinen und Anlagen durch Vergleich der eingetretenen Schäden mit Normalschäden, Der Maschinenschaden 39(1966)

53 Grothus,H., Durch vorbeugenden Unterhalt Störungen vermeiden Ind. Org. 40(1971),S. 260-266

54 Gutenberg,E., Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1958

55 Gutenberg,E., Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre Bd.I, Die Produktion, 20.Auflage Berlin, Heidelberg, New York 1973

56 Gutenberg,E., Die Unternehmung als betriebswirtschaftliche Theorie, Berlin-Wien 1929, Wiederabdruck Frankfurt 1967

57 Hake,O., Radioaktive Verschleißmessung-Ein betriebnahes Kurzprüfverfahren, Industrieanzeiger VI (1955)

58 Hartmann,W.L., Theoretische Überlegungen zur vorbeugenden Instandhaltung, Ind. Org. 40 (1971), S. 197-200

59 Hastings,N.A.J., The Repair-Limit Replacement Method,ORQ 20 (1969), S. 337

60 Hatchett ,M., Henley,J.S., Housing Maintenance Systems, Intern. Journ. of Prod. Research 10 (1972), S. 263ff

61 Henke,M., Zur ökonomischen Nutzungsdauer und Ersatzplanung von Investitionsobjekten bei Ungewißheit, Jacob,H-Pressmar,D.B.-Todt,H.-Zimmermann,H.J.(Hrsg.) [69], S. 473-483

62 Herzig,N., Die theoretischen Grundlagen betrieblicher Instandhaltung, Meisenheim/Glan 1975

63 Hodgson,C.D., Aufbau eines Systems zur vorbeugenden Instandhaltung, Ind. Org. 40 (1971), S. 253-259

64 Horne,R.C., ANI/APS-20 E, Radar Maintainability Study, Status Report No.1, Project 0315, Contract No.sr.7757, ARINC Research Corp. 1959, Washington,D.C.

65 Horne,R.C., Scott,S.R., Ships Maintainability Study, Interim Report No.1, Contract No.7557, ARINC Research Corp. 1959, Washington, D.C.

66 Hotelling ,H.A., A General Mathematical Theory of Depreciation,JASA 20 (1925), S. 340-353

67 Howard,R.: Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse, Zürich 1965

68 Howard,R., Dynamic Probabilistic Systems,Wiley, New York 1971, Vol. I u.II

69 Jacob,H., Pressmar,D.B., Todt,H., Zimmermann,H.J.(Hrsg.), Proceedings in OR 2, Würzburg-Wien 1973

70 Jardine,A.K.S., Determination of Optimal Maintenance Times, The Plant Engineer 13 (1969), S. 109-114

71 Jardine,A.K.S. (Hrsg.), Operational Research in Maintenance, New York 1970

72 Johns,M., Miller,R., Average Renewal Loss Rate, AMS 34 (1963), S. 396-401

73 Jorgenson, D.W., Mc Call,J.J., Radner,R., Optimal Replacement Policy, North-Holland Publ.Comp., Amsterdam 1967

74 Kalman,P.I., A Stochastic Constrained Optimal Replacement Model , NRLQ 17 (1970), S. 547-553

75 Kalymon,B.A., Machine Replacement with Stochastic Costs, MS 18 (1972), S. 288-298

76 Kamien,M.I., Schwartz,N.L., Optimal Maintenance and Sale Age for a Machine Subject to Failure, MS-Appl. 17 (1971) B,S. 495-504

77 Kao,E.P.C., Optimal Replacement Rules when Changes of State are Semi-Markovian, OR 21 (1973),S.1231-1249

78 Kistner,K.P., Betriebsstörungen und Warteschlangen, Opladen 1974

79 Kistner ,K.P., Subramanian, R., Die Zuverlässigkeit eines Systems mit redundanten störanfälligen Komponenten und Reparaturmöglichkeiten , ZfOR 18 (1974), S. 117-130

80 Kistner,K.P., Betriebsstörungen bei Fließbändern ZfOR, 17 (1973), S. 47-65

81 Kölbel,H., Schulze,J., Wirtschaftlichkeitskontrolle der Instandhaltung in Chemiebetrieben, ZfB 35 (1965), 1. Ergänzungsheft, S. 29 ff

82 Kolesar,P., Minimum Cost Replacement under Markovian-Deterioration , MS 12 (1966), S. 694-706

83 Korndörfer,W., Allgemeine Betriebswirtschaftslehre-Aufbau-Ablauf-Führung und Leitung -, Wiesbaden 1970

84 Kosiol,E., Modellanalyse als Grundlage unternehmerischer Entscheidungen, ZfhF 7 (1961)

85 Kress,H., Bibliographie der Instandhaltungsliteratur, Meisenheim /Glan 1970

86 Kruse, Redeker,G., Optimierung der Instandhaltungsorganisation, Betriebstechnische Reihe RKW, REFA, Berlin, Köln, Frankfurt 1971

87 Küpper,W., Optimierung von Gruppenreparaturen, in: Jacob-Pressmar-Todt-Zimmermann [69], S. 279-293

88 Küpper,W., Planung der Instandhaltung, Wiesbaden 1974

89 Kuhn,M., Ein analytisches Lösungsmodell zur kostenoptimalen Instandhaltung vielteiliger Fließfertigungsanlagen durch mehrstufige opportunistische Vorbeugungsstrategien auf der Basis der Markov'schen Kettentheorie,DFG-Forschungsbericht, TU München 1970

90 Levy,P., Processus Semi-Markoviens, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.III, Amsterdam 1954, S. 416-426

91 Lotka,A.J., A Contribution to the Theory of Self-Renewing Aggregates with Special Reference to Industrial Replacement, AMS, 10(1939), S. 1-25

92 Lotka,A.J., Industrial Replacement, Skandinavisk Aktu - arietidskrift, 1933, S. 51-63

93 Luss,H., Kander,Z., A Preparedness Model Dealing with n-Systems Operating Simultaneously, OR 22(1974), S. 117-128

94 Luss,H., Kander,Z., Inspection Policies when Duration of Checking is Non-Negligible, ORQ 25(1974), S. 299-309

95 Männel,W., Wirtschaftlichkeitsfragen der Anlagenerhaltung, Wiesbaden 1968

96 Mäseth,K., Computer steuert Schmier- und Wartungssystem, Bürotechn. u. Org. 19(1971), S. 330ff

97 Mahon,B.H., Bailey,R.I.M., A Proposed Improved Replacement Policy for Army Vehicles,ORQ 12(1975), S. 477-494

98 Makabe,H., Morimura,H., A New Policy for Preventive Maintenance, JORSJ 5(1963), S. 110-124

99 Makabe,H., Morimura,H., On some Preventive Maintenance Policies,JORSJ 6(1963),S. 17-47

00 Makabe,H., Morimura,H., Some Considerations on Preventive Maintenance Policies with Numerical Analysis, JORS J7(1965), S. 154-171

01 Mellerowics,K., Die Maschinen-Instandhaltung,VDI-Nachrichten, 1967, Heft 37, S. 32ff

02 Mertens,P., Die gegenwärtige Situation der betriebswirtschaftlichen Instandhaltungstheorie, ZfB 38(1968),S.805-836

03 Meyer,R.A.Jr., Equipment Replacement under Uncertainity MS 17(1971), S. 750-758

04 Mildner,G., u. a.(Hrsg.), Instandhaltung chemischer und artverwandter Industrieanlagen, Berlin 1970

105 Morimura,H., On some Preventive Maintenance Policies for IFR, JORSJ 12(1970), S. 94-124

106 Näslund,B., Simultaneous Determination of Optimal Repair Policy and Service Life,Swedish Journal of Economics 68 (1966), S. 63-73

107 Nakagawa,T., Osaki,S., The Optimum Repair Limit Replacement Policies, ORQ 25(1974), S. 311-317

108 Nakagawa,T., Osaki,S., Optimum Replacement Policies with Delay, J.Appl. Prob. 11(1974), S. 102-110

109 Nakagawa,T., Osaki,S., Optimum Preventive Maintenance Policies for a 2-Unit Redundant System, IEEE Transactions on Reliability R-23 (1974), S. 86-91

110 Nakagawa,T., Osaki,S., Optimum Preventive Maintenance Policies Maximizing the Mean Time to the First System Failure for a Two-Unit Standby Redundant System, Journal of Optimization Theory and Applications 14(1974), S. 115-129

111 Neuvians,G., Zimmermann,H.J., Die Ermittlung optimaler Ersatz - und Instandhaltungspolitiken mit Hilfe des dynamischen Programmierens, Ablauf - und Planungsforschung 11(1970), S. 94-104

112 Oesterer,D., Auswahl einer optimalen Ersatzstrategie mit Hilfe eines Entscheidungsdiagramm, ZfOR, 17(1973), S. 39-46

113 Oesterer,D., Optimale Entwurfszuverlässigkeit nicht reparierbarer Geräte bei vorgegebener Verbrauchsstrategie, ZfOR 18(1974), B 185-198

114 Opitz,H., Schaller,E., Untersuchungen der Ursachen des Werkzeugverschleißes, Forschungsberichte des Landes NRW, Köln, Opladen 1966

115 Ordelheide,D., Instandhaltungsplanung, Wiesbaden 1973

116 Osaki,S., System Reliability Analysis by Markov Renewal Processes, JORSJ 12(1979), S. 127-188

117 Osaki,S., Nakagawa,T., A Note on Age Replacement, IEEE Transactions on Reliability R-24(1975), S. 92-94

118 Ososkov,G.A., A Limit for Flows of Similar Events,Theory of Prob. and is Appl. 1 (1956),S. 248-255

19 Prabhu,N.U., Stochastic Processes, The Macmillan Comp., New York 1965

20 Preinreich,G.A.D., Annual Survey of Economic Theory: The Theory of Depreci ation, Econometrica 6(1938), S.219-241

21 Preinreich,G.A.D., The Economic Life of Industrial Equipment, Econometrica 8(1940), S. 12-44

22 Radner,R., Jorgenson,D.W., Opportunistic Replacement of a Singe Part in the Presence of Several Monitored Parts, MS 10(1963),S. 70-84

23 Redeker,G., Planung der Anlagenerhaltung, in Fuchs,J./ Schwantag,K.: AGPLAN-Handbuch zur Unternehmensplanung, Berlin 1970

24 Redeker,G., Schadensfolgekosten-Ermittlung als Planungsgrundlage für die vorbeugende Instandhaltung,Ind.Org. 40(1971),S. 211-215

25 Redeker,G., Bestimmung des optimalen Lagerbestandes an Instandhaltungsmaterial und Ersatzteilen, Fachbericht aus dem Inst. f. Fabrikanlagen der TU Hannover, Betriebstechnische Reihe RKW/REFA 1973

26 Redeker,G., Technische und betriebswirtschaftliche Grundlagen für die Methodenwahl bei der Erhaltung betrieblicher Anlagen, Diss. TU Hannover 1969

27 Rinne,H., Strategien der Instandhaltung, Meisenheim/Glan 1972

28 Rinne,H., Untersuchungen über optionale Präventivstrategien in der Instandhaltung,ZfOR 17(1973), S. 13-24

29 Roll,Y., Naor,P., On a Problem of Preventive Maintenance JORSJ7(1964), S.3-16

30 Roll,Y., Naor,P., Preventive Maintenance of Equipment Subject to Continuous Deterioration and Stochastic Failure , ORQ 19 (1968), S. 61-71

31 Roos,C,F., Mathematical Theory of Depreciation and Re - placement, Am. Journ. Math. 50(1928),S. 147-157

32 Roos,C.F., The Problem of Depreciation in the Calculus of Variations, Bull.Am.Math.Soc. 34(1928), S. 218-228

33 Ross,S.M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco 1970

34 Rusch,E., Theorie und Praxis von Lebensdauerverteilungen, Technische Zuverlässigkeit, Heft 2, 1964, S. 81-100

135 Rytz,R., Simulation löst Unterhaltsprobleme von morgen, Ind. Org. 40(1971), S. 229-232

136 Sasieni,M., Yaspan,L., Friedman,L., Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Operations-Research, Würzburg 19

137 Serfozo,R.F., A Replacement Problem Using a Wald Identity for Discount Variables,MS 20(1974), S. 1314-1315

138 Sethi,S.P., Morton,T.E., A Mixed Optimization Technique for the Generalized Machine Replacement Problem,NRLQ 19(1972), S.471-482

139 Sethi,S.P., Simultanecus Optimization of Preventive Maintenance and Replacement Policy for Machines: A Modern Control Theory Approach, AIIE-Transactions 5(1973), S. 156-163

140 Smith,W.L., Asymptotic Renewal Theorems,Proc.Roy. Soc. Edinb. 64(1954), Ser.A,S. 9-48

141 Smith,W.L., Regenerative Stochastic Processes,Proc.Roy. Soc. London 232(1955),Ser.A, S. 6-31

142 Smith,W.L., Renewal Theory and its Ramifications,J.Roy. Stat. Soc. 20(1958), Ser.B, S. 243-302

143 Spickenheuer ,W., The Optimality of Preventive Maintenance in Complex Systems, in: Proceedings of a Workshop in Produktion Theory and its Applications, European Institute for Advanced Studies in Management Science, Brussels, November 20-22,1974, Institute Report 75-6, S. 148-170

144 Scheaffer,R.L., Optimum Age Replacement Policies with an Increasing Cost Factor, Technometrics 13(1971),S.139-144

145 Scheer,A.W., Sensitivitätsanalysen der Vorteilhaftigkeit vorbeugender Ersatzstrategien für stochastisch ausfallende komplexe Produktionssysteme in: Jacob-Pressmar-Todt-Zimmermann [69] ,S. 319-332

146 Scheer,A.W., Instandhaltungspolitik, Wiesbaden 1974

147 Schelo,S.J., Integrierte Instandhaltungsplanung und -steuerung mit elektronischer Datenverarbeitung, Berlin 1972

148 Schneeweiß,H., Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin-Heidelberg-New York 1967

149 Schneider,D., Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von An - lagegütern als Bestimmungsgrund der Abschreibungen, Köln-Opladen 1961

150 Schneider,E., Die wirtschaftliche Lebensdauer industrieller Anlagen , Weltwirtschaftliches Archiv 55(1942),S. 90-128

151 Schneider,E., Wirtschaftlichkeitsrechnung, 8.Auflage, Tübingen 1973

152 Scholz,H., Gewinnoptimale Instandhaltung, Der Betrieb 24(1971),S. 976-979

153 Schreiber,H.H., Zur Auswertung von Lebensdauerversuchen mit Wälzlagern, Diss. TH München 1963

154 Schulte,K.W., Optimale Nutzungsdauer und optimaler Ersatzzeitpunkt bei Entnahmemaximierung, Meisenheim/Glan 1975

155 Schwartz,A.N., Scheler,J.A, Cooper,C.R., Dynamic Programming Approach to the Optimization of Naval Aircraft Rework and Replacement Problems,NRLQ 18(1971),S.395-414

156 Störmer,H., Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit, Oldenburg 1970

157 Tagmann,H.R., Kapazitätssteigerung im Unterhalt mit Hilfe von Zeitrichtwerten, Ind. Org. 40(1971), S. 225-228

158 Tahara,A., Nishida,T., Optimal Replacement Policies for a Repairable System with Markovian Transition of States, JORSJ 16(1973), S. 78-103

159 Takacs,E.L., Grundlagen zur Erstellung eines Instandhaltungskonzeptes, Ind. Org. 40(1971), S.205-210

160 Tapiero,C.S., Optimal Maintenance and Replacement of a Sequence of n-Machines and Technical Obsdescence, Opsearch 10(1973), S. 1-13

161 Tapiero,C.S., Production Scheduling with Significant Changeover Costs, ZfOR 17(1973), S.A 33ff

162 Tapiero,C.S., Optimal Simultaneous Replacement and Maintenance of a Machine with Process Discontinuities, RAIRO 2(1971), S. 79-86

163 Taylor,J.S., A Statistical Theory of Depreciation JASA 18 (1923), S. 1010-1023

164 Terplan,K., Optimale Beherrschung von Störungen im Fertigungsprozeß, ZfOR 17(1973), S. 25-37

165 Thompson,G.L., Optimal Maintenance Policy and Sale Date of a Machine,MS 14(1968), S. 543,550

166 Thompson,J.E., Procedures in Organisation,in: Morrow,L.C. (Hrsg.), Maintenance Engineering Handbook, New York, Toronto, London 1957, S. 1-39

167 Thompson,W.E., Chang,E.Y., Bayes Confidence Limits for Reliability of Redundant Systems, Technometrics 17(1975), S. 89-93

168 Tilquin,C., Cleroux,R., Block Replacement Policies with General Cost Structures, Technometrics 17(1975)S.291-298

169 Turban,E., The Use of Mathematical Models in Plant Maintenance, Decision Making, MS 13(1967), S. 342

170 Vanderperre,E.J., The Busy Period of a Repairman Attending a (n+1)-Unit Paralel System, RAIRO 2(1973), S. 124-126

171 VDI-Bildungswerk Instandhaltung 1965

172 Vergin,R.C., Optimal Renewal Policies for Complex Systems, NRLQ 15(1968), S. 523-534

173 Vogel,W., Wahrscheinlichkeitstheorie, Göttingen 1970

174 Volodin,I.N., On the Discrimination of Gamma and Weibull Distributions, SIAM-Theory of Prob.and its Appl. 19 (1974). S. 383ff

175 Wesemann,K.F., Kostentransparenz und Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung in der Instandhaltung, Stahl und Eisen 91(1971), S. 1130ff

176 Wicksell,K., Dr. Gustav Åkerman's Realkapital und Kapitalzins, Ekonomisk Tidskrift 25(1923), S. 145-180,Übersetzung: Real Capital and Interest, in: Wicksel ,K., Lectures on Political Economy,Vol.I, London 1934

177 Wiegel, Integrierte Instandhaltung, Werkstattechnik 62(1972), S. 630ff

178 Wittenberg,U.H., Verteilungstheorien für Störungen und Ausfälle von Maschinen und Anlagen, Zeitschrift für wirtschaftliche Fertigung 58(1963), S. 586-590

179 Witting,H., Mathematische Statistik, Stuttgart 1966

180 Wöhe,G., Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 11. Aufl., München 1975

181 Wohinz,J.W., Morphologie des Ersatzteilbedarfes,Ind. Org. 43(1974), S. 199-202

182 Wolff,M., Optimale Instandhaltungspolitiken in einfachen Systemen, Berlin-Heidelberg-New York 1970

183 Wolff,M.R., Subramanian,R., Age Replacement in Simple Systems with Inc reasing Loss Function Diskussionsarbeit Nr. 26, Institut für Gesellschaft- und Wirtschaftswissenschaften der Universiät Bonn, Betriebswirtschaftliche Abteilung, 1972

184 Wolff,M.R., Subramanian,R., Optimal Readjustment Intervals OR 22(1974), S. 191-197

185 Wolff,M.R., Optimal Adjustment of Production Facilities in a Stochastic Production Process,in: Proceeding of a Workshop in Production Theory and its Applications, European Institute for Advanced Studies in Management Science , Brussels, November 20-22,1974, Institute Report 75-6, S. 114-147

186 Wu,N.L., Scheduling Technique Evens out Maintenance Work Load, Ind. Eng. 3(1971), S. 17-21

Lebenslauf

Geburt	25.8.1949 als Sohn des Diplom-Kaufmanns Philipp Spickenheuer und seiner Ehefrau in Asbach/ Westerwald
Schulbildung	1956-1960 Volksschule in Asbach/Westerwald 1960-1968 Gymnasium in Neunkirchen/Bez. Köln 5/68 Abitur
Studium	ab 10/1968 Studium der Mathematik an der Universität Bonn 22.10.1970 Diplom-Vorprüfung in Mathematik an der Universität Bonn 7.6.1973 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik an der Universität Bonn 12/1970-9/1973 studentische und wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Bonn ab 10/1973 Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Bonn 3/1974-2/1976 Stipendiat nach dem Graduiertenförderungsgesetz ab 9/1974 wissenschaftliche Hilfskraft im Sonderforschungsbereich 21 an der Universität Bonn